

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 5 (4 Punkte)

(a) Seien $m \in \mathbb{N}$, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

$$m|a \wedge m|b \Rightarrow m|(\alpha \cdot a + \beta \cdot b)$$

(b) Seien $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_k, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$m|a_1 \wedge m|a_2 \wedge \dots \wedge m|a_k \Rightarrow m|(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k)$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

(a) Seien A, B Mengen. Zeigen Sie, dass

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad (a \in A, b \in B)$$

ein Paar ist, d.h.

$$\forall a, a' \in A \quad \forall b, b' \in B : \quad (a, b) = (a', b') \Rightarrow a = a' \wedge b = b'$$

(b) Zeigen Sie, dass mit der Paardefinition aus (a) gilt:

$$A \times B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

(a) Seien A, B, C, D Mengen. Zeigen Sie:

$$(*) \quad (A \setminus C) \times (B \setminus D) \subset (A \times B) \setminus (C \times D).$$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst für Aussagen \mathcal{C}, \mathcal{D} , dass $\neg(\mathcal{C} \vee \mathcal{D}) \Rightarrow \neg(\mathcal{C} \wedge \mathcal{D})$ allgemein gültig ist.)

(b) Geben Sie ein Beispiel an, für das Gleichheit in $(*)$ **nicht** erfüllt ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 8 (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ durch

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a + d = b + c$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird.

- (b) Zeigen Sie für die Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation aus (a):

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= [(a - b, 0)] & (a \geq b, a, b \in \mathbb{N}_0) \\ [(a, b)] &= [(0, b - a)] & (a \leq b, a, b \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

- (c) Zeigen Sie, dass die Menge aller Äquivalenzklassen zur Äquivalenzrelation aus (a) durch

$$\{[(a, 0)] : a \in \mathbb{N}_0\} \cup \{[(0, a)] : a \in \mathbb{N}\}$$

gegeben ist. Weisen Sie außerdem nach, dass diese Äquivalenzklassen paarweise disjunkt sind.

Abgabe einzeln oder zu zweit: Dienstag, 4.11.2008 bis 12⁰⁰ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock