

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 13

Zu Aufgabe 49:

(a) Sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ eine Dreiecksmatrix. Dann gilt:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

(b)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} n!$$

Ad (a):

Zunächst gilt für eine untere Dreiecksmatrix A , daß A^T eine obere Dreiecksmatrix ist; hat man also die Aussage für obere Dreiecksmatrizen bewiesen, so folgt für untere Dreiecksmatrizen A mit Vorlesung Lemma (5.6) (a), d.h. $\det(A) = \det(A^T)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n,n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{Dreiecksmatrix}]{\text{obere}} \det(A) = \det(A^T) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Wir brauchen die Aussage also nur für obere Dreiecksmatrizen zu zeigen.

Wir beweisen dies nun mit vollständiger Induktion nach n :

$$\text{Ist } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ obere Dreiecksmatrix in } K^{n \times n}, \text{ so ist } \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

also gleich dem Produkt der Hauptdiagonalelemente von A .

Induktionsanfang: $n = 1$

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det(A) = a_{11}.$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ obere Dreiecksmatrix} \implies \det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Induktionsbeweis:

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & \vdots & \ddots & a_{nn+1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \in K^{(n+1) \times (n+1)}. \text{ Wir verwenden den Laplace'schen}$$

Entwicklungssatz und entwickeln $\det(A)$ nach der letzten Zeile; dabei ist $A^{(i,j)}$ diejenige Matrix, die aus A entsteht, indem man in A die i -te Zeile und die j -te Spalte streicht: $A^{(i,j)} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{(n+1)+j} \underbrace{a_{n+1,j}}_{\substack{=0 \text{ für} \\ 1 \leq j \leq n}} \det(A^{(n+1,j)}) = (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot a_{n+1,n+1} \det(A^{(n+1,n+1)}) =$$

$$= a_{n+1,n+1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & a_{n,n+1} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

$$= a_{n+1,n+1} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \stackrel{\text{IV}}{=} a_{n+1,n+1} \cdot (a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \cdot a_{n+1,n+1}$$

obere Dreiecksmatrix

q.e.d.

Ad (b):

Dem Hinweis zufolge ziehen wir von der ersten Zeile von A die letzte Zeile ab; wie in Hilfssatz (5.3)/Vorlesung ausgeführt ändert sich dabei der Wert von $\det(A)$ nicht:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \stackrel{1. \text{ Zeile} - n \cdot \text{te Zeile}}{=} \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}$$

Nun könnten wir nach der ersten Zeile gemäß Laplace entwickeln, da in dieser nur noch ein von 0 verschiedener Term auftritt. Wenn wir dieses Verfahren aber auch auf die zweite Zeile anwenden, d.h. auch von der zweiten Zeile die letzte Zeile abziehen, vereinfacht sich die Gestalt der Matrix erneut:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 2-n & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{2.\text{Zeile}-n\text{-te Zeile}}} \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}$$

Wendet man das Verfahren nun sukzessive auf alle Zeilen $1 \leq i \leq n-1$ an, d.h. zieht man von der i -ten Zeile ($1 \leq i \leq n-1$) jeweils die n -te Zeile ab, so erhält man:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{für } 1 \leq i \leq n-1}]{\substack{i.\text{Zeile} \\ -(n\text{-te}) \text{ Zeile}}} \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}$$

Man sieht, daß nun auch in der letzten Spalte nur noch ein Eintrag ungleich Null steht; entwickeln wir die Determinante von A nach Laplace nach der letzten Spalte, so erhalten wir:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{n\text{-ter Spalte}}]{\text{nach}} \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}}_{=: B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} \cdot \underbrace{b_{in}}_{\substack{=0 \text{ für} \\ 1 \leq i \leq n-1}} \cdot \det(B^{(i,n)})$$

$$\stackrel{b_{nn}=n}{=} (-1)^{n+n} \cdot n \cdot \det \begin{pmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \hline n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \quad (\bullet)$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(\star)}{=} n \cdot \underbrace{[(1-n) \cdot (2-n) \cdot (3-n) \cdot \dots \cdot (-1)]}_{n-1 \text{ Faktoren}} \\ &= n \cdot (-1)(n-1) \cdot (-1)(n-2) \cdot (-1)(n-3) \cdot \dots \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= n \cdot (-1)^{n-1} \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1 \\ &= (-1)^{n-1} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 1 \\ &= (-1)^{n-1} \cdot n! \end{aligned}$$

Dabei wurde in (\star) die Teilaufgabe (a) verwendet, da die Streichmatrix $B^{(n,n)}$ in (\bullet) eine obere Dreiecksmatrix ist, und folglich der Wert der Determinante von $B^{(n,n)}$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist. q.e.d.

Zu Aufgabe 50:

Man berechne $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
 $=: A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$

- (a) mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz
(b) durch Transformation in Zeilenstufenform mittels elementarer Zeilenumformungen.

Ad (a):

Wir suchen eine Zeile bzw. Spalte mit möglichst vielen Nullen; zum Beispiel ist die letzte Zeile geeignet: wir entwickeln $\det(A)$ nach der 4. Zeile:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^4 (-1)^{4+j} a_{4j} \det(A^{(4,j)}) \\
&\stackrel{\text{da}}{=}_{a_{42}=0} (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{entwickeln nach 2. Zeile}} + (-1)^{4+3} \cdot 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{entwickeln nach 1. Zeile}} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{entwickeln nach 2. Zeile}} \\
&\stackrel{\text{Laplace}}{=} - \left[\underbrace{(-1)^{2+1} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Entwicklung der ersten Determinante}} \right] - \\
&\quad - \left[\underbrace{(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{\text{Entwicklung der zweiten Determinante}} \right] + \\
&\quad + \left[\underbrace{(-1)^{2+1} \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{\text{Entwicklung der dritten Determinante}} \right] \\
&\stackrel{(\star)}{=} - [-2 \cdot (3-4) - (8-9)] - [(2-3) - 2(3-2) + (9-4)] + [-3(8-9) + 2(4-6)] \\
&= -3 - 2 - 1 \\
&= \underline{\underline{-6}}
\end{aligned}$$

wobei in (★) die Entwicklungsformel für 2×2 -Matrizen verwendet wurde (siehe Vorlesung/Beispiel nach (5.5)):

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

Ad (b):

Wir verwenden die Aussagen aus Vorlesung/Hilfssatz (5.3) :

- (•) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert.
- (••) Eine Determinante ändert das Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen vertauscht.

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II-3 \cdot I \\ III-2 \cdot I \\ IV-I \\ \equiv \\ (\bullet)}]{\substack{II-2 \cdot IV \\ IV-2 \cdot III \\ \equiv \\ (\bullet)}} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -9 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{II \leftrightarrow III \\ \equiv \\ (\bullet\bullet)}]{\substack{IV + \frac{2}{5} \cdot III \\ \equiv \\ (\bullet)}} -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{\text{Aufg.} \\ 49(a)}]{\substack{\equiv \\ (\bullet)}} -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{\equiv \\ 49(a)}]{\substack{\text{Aufg.} \\ 49(a)}} (-1) \cdot \left[1 \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot \frac{6}{5} \right] \\ & = \underline{\underline{-6}} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 51:

- (a) Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n \times n}$ eine antisymmetrische Matrix, d.h. es gilt $\forall 1 \leq i \leq j \leq n : a_{ij} = -a_{ji}$.

Dann gilt:

$$n \text{ ungerade} \implies \det(A) = 0.$$

- (b) Man berechne für $\varphi \in \mathbb{R}$ $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$. Steht das Ergebnis in Widerspruch zu (a)?

Ad (a):

Es gilt für die transponierte Matrix von A :

$$A^T = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \xRightarrow[\text{Transponierten}]{\text{Def. der}} c_{ij} \xRightarrow[\text{symmetrisch}]{A \text{ anti-}} a_{ji} = -a_{ij}$$

$$\implies A^T = (-a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = -(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = -A$$

Also:

$$\det(A) \xRightarrow[(5.6)(e)]{\text{Vorl.}} \det(A^T) = \det(-A) = \det((-1) \cdot A) \xRightarrow[(5.6)(b)]{\text{Vorl.}} (-1)^n \cdot \det(A) \xRightarrow[\text{ungerade}]{n} -\det(A)$$

$$\implies 0 = \det(A) + \det(A) \xRightarrow[\text{in } K]{\text{Distrib.}} (1+1) \cdot \det(A) \xRightarrow[1+1 \neq 0]{} \det(A) = 0 \quad (\text{weil } (K, \cdot) \text{ nullteilerfrei ist}).$$

q.e.d.

Ad (b):

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathbb{R} : \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}}_{=:A} &\xRightarrow[\text{nach 1. Zeile}]{\text{entwickeln}} (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \xRightarrow[\text{Vorlesung}]{\text{Beispiel}} \\ &= \cos \varphi \cdot \cos \varphi - (-\sin \varphi) \cdot \sin \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \xRightarrow{\text{Analysis}} 1. \end{aligned}$$

Nun ist $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, d.h. in der Notation von Teil (a) ist $n = 3$ ungerade, aber $\det(A) \neq 0$.

Dies ist aber dennoch kein Widerspruch zu (a), denn A ist nicht antisymmetrisch:

Dafür müßte nämlich gelten: $\forall 1 \leq i \leq j \leq n : a_{ij} = -a_{ji}$, insbesondere also für $i = j$:
 $a_{ii} = -a_{ii} \implies (1+1) \cdot a_{ii} = 0 \xRightarrow[1+1 \neq 0]{} a_{ii} = 0$.

Antisymmetrische Matrizen haben also nur Nullen in der Hauptdiagonalen !

Da in A gilt, daß $a_{11} = 1$, ist A nicht antisymmetrisch.

Bemerkung:

Für gerade n ist die Aussage in Teil (a) falsch:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist antisymmetrisch, aber } \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Zu Aufgabe 52:

Sei K ein Körper.

(a) Sei $A \in K^{m \times m}$ invertierbar, $B \in K^{m \times n}$, $C \in K^{n \times m}$ und $D \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(D - C \cdot A^{-1} \cdot B)$$

Hinweis: Man berechne $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -C \cdot A^{-1} & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

(b) Sei $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, $B, C, D \in K^{n \times n}$ und $A \cdot C = C \cdot A$. Dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A \cdot D - C \cdot B)$$

Ad (a):

Wir führen zunächst den Hinweis aus; dazu verwenden wir die Regeln für das Blockmatrixprodukt aus den Lösungsvorschlägen zu Blatt 8:

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -C \cdot A^{-1} & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \stackrel{(\star)}{=} \left(\begin{array}{c|c} E_m \cdot A + 0 \cdot C & E_m \cdot B + 0 \cdot D \\ \hline \underbrace{(-C \cdot A^{-1}) \cdot A + E_n \cdot C}_{=-C(A^{-1}A)=-C} & (-C \cdot A^{-1}) \cdot B + E_n \cdot D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D - C A^{-1} B \end{array} \right) \quad (\bullet)$$

$= -C + C = 0$

Dabei ist in (\star) zu beachten, daß die Matrixprodukte wohldefiniert sind:

$$\left. \begin{array}{l} A \in K^{m \times m} \implies E_m \cdot A \text{ sinnvoll} \\ 0 \in K^{m \times n} \wedge C \in K^{n \times m} \implies 0 \cdot B \text{ sinnvoll} \end{array} \right\} \implies E_n \cdot A + 0 \cdot C \in K^{n \times n} \text{ sinnvoll.}$$

Dies ist für alle auszuführenden Produkte und Summen zu testen.

Nun wenden wir in (\bullet) links und rechts die Determinante an:

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -C \cdot A^{-1} & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) &= \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - C A^{-1} B \end{pmatrix} \\ \stackrel{\text{Multiplikations-}}{\iff} \stackrel{\text{satz}}{\iff} \underbrace{\det \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -C \cdot A^{-1} & E_n \end{pmatrix}}_{= \det(E_m) \cdot \det(E_n)} \cdot \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \underbrace{\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - C A^{-1} B \end{pmatrix}}_{= \det(A) \cdot \det(D - C A^{-1} B)} \\ \stackrel{\text{Dreiecksblöcke}}{\iff} \stackrel{\text{Vorl. (5.9)}}{\iff} (\underbrace{\det(E_m)}_{=1} \cdot \underbrace{\det(E_n)}_{=1}) \cdot \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det(A) \cdot \det(D - C A^{-1} B) \\ \iff 1 \cdot \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det(A) \cdot \det(D - C A^{-1} B) \\ \iff \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \det(A) \cdot \det(D - C A^{-1} B) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Ad (b):

Es gelte nun $A \cdot C = C \cdot A$.

Wir wenden Teil (a) an mit $m = n$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} & \stackrel{\substack{\text{Teil} \\ (a)}}{=} \det(A) \cdot \det(D - CA^{-1}B) \\ & \stackrel{m=n}{=} \det(A \cdot (D - CA^{-1}B)) \\ & \stackrel{\substack{\text{Multiplikationssatz} \\ (\text{Produkt definiert})}}{=} \det(AD - A \cdot (CA^{-1}B)) \\ & \stackrel{\text{Assoz.}}{=} \det((AD - \underbrace{(AC)}_{= CA}) \cdot (A^{-1}B)) \\ & = \det(AD - C \underbrace{(AA^{-1})}_{= E_n} B) \\ & = \det(AD - CB) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$