

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 14

Zu Aufgabe 53:

Man bestimme die reellen Eigenwerte und Eigenräume folgender reeller Matrizen:

$$(a) \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ad (a):

Nach Satz (6.2) der Vorlesung sind die Eigenwerte einer Matrix $M \in K^{n \times n}$ gerade die Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms $\det(M - \lambda \cdot E_n)$. Wir bestimmen dieses also für die Matrix A unter Zuhilfenahme der Regeln aus Hilfssatz (5.3), der beschreibt, wie sich elementare Zeilenumformungen (und auch Spaltenumformungen wegen $\det(A) = \det(A^T)$) auf den Wert einer Determinante auswirken:

- (•) Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile addiert (das Analoge gilt für Spalten).
- (••) Eine Determinante ändert das Vorzeichen, wenn man zwei Zeilen oder zwei Spalten vertauscht.
- (•••) Der Wert einer Determinante geht in das λ -fache über, wenn man eine Zeile oder Spalte mit $\lambda \in K$ multipliziert.

Im folgenden möge I die erste Zeile, I_s die erste Spalte usw. bezeichnen.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \cdot E_3) &= \det \left(\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & -1 & -5 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 2 \\ -5 & -1-\lambda & -5 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{II-5 \cdot III \\ I+(3-\lambda) \cdot III \\ (\bullet)}}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \cdot (3-\lambda) \\ 0 & 4-\lambda & 5 \cdot (\lambda-1) \\ -1 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{(-1) \cdot III \\ (\bullet \bullet \bullet) \\ I \leftrightarrow III \\ (\bullet \bullet)}}{=} (-1) \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 4-\lambda & 5(\lambda-1) \\ 0 & \lambda-2 & (\lambda-1) \cdot (\lambda-2) \end{pmatrix} \quad (\star) \quad \begin{pmatrix} \text{da: } 2-\lambda \cdot (3-\lambda) = \\ = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ = (\lambda-1) \cdot (\lambda-2) \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{III_s - (\lambda-1) \cdot II_s \\ (\bullet)}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 5(\lambda-1) - (\lambda-1) \cdot (4-\lambda) \\ 0 & \lambda-2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{matrix} II_s \longleftrightarrow III_s \\ \equiv \\ (\bullet\bullet) \end{matrix} & - \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \underbrace{(\lambda+1)(\lambda-1)}_0 & 4-\lambda \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{da } 5(\lambda-1) - (\lambda-1) \cdot (4-\lambda) = \\ = (5 - (4-\lambda)) \cdot (\lambda-1) \\ = (1+\lambda) \cdot (\lambda-1) \end{pmatrix} \\
& = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) \quad (\text{siehe Aufgabe 49 (a)})
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \mathbb{R} \text{ Eigenwert von } A & \iff \det(A - \lambda E_3) = 0 \iff -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \\
& \iff \lambda_1 = -1 \vee \lambda_2 = 1 \vee \lambda_3 = 2.
\end{aligned}$$

Für die Eigenräume von A zu den Eigenwerten λ_i gilt:

$$\text{Eig}_A(\lambda_i) = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid A \cdot z = \lambda_i \cdot z\} = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_i E_3) \cdot z = 0\} = \text{Kern}(A - \lambda_i E_3).$$

Wir müssen also den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda_i E_3) \cdot z = 0$ bestimmen. Dabei können wir uns die elementaren Zeilenumformungen zunutze machen, die wir bei der Bestimmung des charakteristischen Polynoms an $A - \lambda E_3$ bis zum Zeichen (\star) bereits ausgeführt haben:

$$A - \lambda \cdot E_3 \xrightarrow{\text{siehe } (\star)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 4-\lambda & 5(\lambda-1) \\ 0 & \lambda-2 & (\lambda-1) \cdot (\lambda-2) \end{pmatrix} \quad (\star\star).$$

Ferner wissen wir aus Vorlesung (6.18), daß (algebraische Vielfachheit von λ_i) \geq (geometrische Vielfachheit von λ_i), d.h. die Vielfachheit der Nullstelle λ_i im charakteristischen Polynom χ_A von A ist größer oder gleich der Dimension des Eigenraums von λ_i . Eigenräume sind aber niemals $\{0\}$:

Zu jedem Eigenwert gibt es einen Eigenvektor $\neq 0$, und dieser liegt nach Definition im zugehörigen Eigenraum $\implies \text{Eig}_A(\lambda_i) \neq \{0\} \implies (\text{geometrische Vielfachheit von } \lambda_i) = \dim(\text{Eig}_A(\lambda_i)) > 0$. Da aber hier alle drei Nullstellen λ_i einfache Nullstellen von χ_A sind, folgt:

$$1 = (\text{algebraische Vielfachheit von } \lambda_i) \geq \dim(\text{Eig}_A(\lambda_i)) \geq 1 \implies \dim(\text{Eig}_A(\lambda_i)) = 1.$$

Ad $\lambda_1 = -1$:

$$A + E_3 \xrightarrow{(\star\star)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \frac{3}{5} \cdot \text{II}]{\frac{1}{5} \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Zeilenstufenform; wir sehen:

$$\text{rang}(A + E_3) = \text{Anzahl Stufen} = 2 \implies \dim(\text{Eig}_A(\lambda_1)) = 3 - 2 = 1, \text{ wie erwartet.}$$

x_3 ist freier Parameter, kann also als $\mu \in \mathbb{R}$ gewählt werden, und die Auflösung des Gleichungssystems liefert:

$$\left. \begin{array}{l} 2. \text{ Gleichung : } x_2 - 2\mu = 0 \implies x_2 = 2\mu \\ 1. \text{ Gleichung : } x_1 + \mu = 0 \implies x_1 = -\mu \end{array} \right\} \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ 2\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{R}) \text{ liefert alle}$$

Lösungen des Gleichungssystems, also:

$$\text{Eig}_A(\lambda_1) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ad $\lambda_2 = 1$:

$$A - E_3 \xrightarrow{(\star\star)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3} \cdot \text{II}]{\text{III} + \frac{1}{3} \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I - \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wieder ist x_3 freier Parameter, d.h. wir setzen $x_3 = \mu \in \mathbb{R}$, und es folgt:

2. Gleichung : $x_2 = 0$
 1. Gleichung : $x_1 + \mu = 0 \implies x_1 = -\mu$ } $\implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{R})$ liefert
 alle Lösungen des Gleichungssystems, also:

$$\text{Eig}_A(\lambda_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ad $\lambda_3 = 2$:

$$A - 2 \cdot E_3 \xrightarrow{(\star\star)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} I - \frac{1}{2} \cdot II \\ \frac{1}{2} \cdot II \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erneut ist x_3 freier Parameter, d.h. wir setzen wieder $x_3 = \mu \in \mathbb{R}$, und es folgt:

2. Gleichung : $x_2 + \frac{5}{2}\mu = 0 \implies x_2 = -\frac{5}{2}\mu$
 1. Gleichung : $x_1 - \frac{1}{2}\mu = 0 \implies x_1 = \frac{1}{2}\mu$ } $\implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\mu \\ -\frac{5}{2}\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{R})$ liefert alle Lösungen des Gleichungssystems, also:

$$\text{Eig}_A(\lambda_2) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ad (b)

Man erkennt unmittelbar, daß $\text{rang}(B) = 1$: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} II-I \\ III-I \\ IV-I \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Damit ist aber sicher 0 ein Eigenwert von B : $\dim(\text{Kern}(B)) = 4 - \text{rang}(B) = 4 - 1 = 3 \implies \text{Kern}(B) \neq \{0\} \implies$ es gibt ein $0 \neq x \in \text{Kern}(B) = \text{Kern}(B - 0 \cdot E_4) = \text{Eig}_B(0)$.

Da andererseits $k_1 := (\text{algebraische Vielfachheit von } 0) \geq (\text{geometrische Vielfachheit von } 0) = \dim(\text{Eig}_B(0)) = 3$, ist 0 mindestens dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_B .

Zudem erkennt man leicht, daß $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von B ist: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Also:

$k_2 := (\text{algebraische Vielfachheit von } 4) \geq (\text{geometrische Vielfachheit von } 4) = \dim(\text{Eig}_B(4)) \geq 1$.

Nun hat jedes Polynom über einem Körper höchstens so viele Nullstellen, wie sein Grad angibt, hier also mit Lemma (6.10) : $\text{grad}(\chi_B) = 4$. Die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Nullstellen von χ_B ist also höchstens 4 $\implies 4 \geq k_1 + k_2 \geq \dim(\text{Eig}_B(0)) + \dim(\text{Eig}_B(4)) \geq 3 + 1 = 4 \implies k_1 = \dim(\text{Eig}_B(0)) = 3 \wedge k_2 = \dim(\text{Eig}_B(4)) = 1$.

Damit kennen wir das charakteristische Polynom χ_B , denn es kann wegen $k_1 + k_2 = 4$ keine weiteren Nullstellen mehr geben, und so ist

$$\chi_B(\lambda) = \lambda^3(\lambda - 4) \quad .$$

Natürlich können wir das charakteristische Polynom von B auch wie in (a) direkt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 \det(B - \lambda \cdot E_4) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(\bullet)}]{\substack{IV-III \\ III-II \\ II-I}} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\lambda \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{III_s + IV_s}{=} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \stackrel{II_s + III_s}{=} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{I_s + II_s}{=} \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{\text{Aufgabe 49 (a)}}{=} (4-\lambda) \cdot (-\lambda)^3 \\
 &= -\lambda^3(4-\lambda) .
 \end{aligned}$$

Also ist $\lambda_1 := 0$ eine dreifache Nullstelle, $\lambda_2 := 4$ eine einfache Nullstelle von χ_B .

Zu den Eigenräumen:

Ad $\lambda_1 = 0$:

Wie oben:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV-I}]{\substack{II-I \\ III-I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wir haben also eine Stufe, d.h. $\text{rang}(B - 0 \cdot E_4) = 1 \implies \dim(\text{Eig}_B(0)) = 4 - 1 = 3$, und damit drei freie Parameter $x_2 = \mu, x_3 = \nu, x_4 = \xi$. Auflösung der ersten Gleichung liefert:

$$x_1 + \mu + \nu + \xi = 0 \implies x_1 = -\mu - \nu - \xi \implies$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu - \nu - \xi \\ \mu \\ \nu \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nu \\ 0 \\ \nu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\xi \\ 0 \\ 0 \\ \xi \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu, \nu, \xi \in \mathbb{R}) \implies$$

$$\text{Eig}_B(0) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ad $\lambda_2 = 4$:

$$B - 4E_4 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II-I}]{\substack{IV-III \\ III-II}} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{vertauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot I \\ \frac{1}{4} \cdot II \\ \frac{1}{4} \cdot III \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV+3 \cdot I+2 \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV+III} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt einen freien Parameter: $x_4 = \mu$, und wir lösen wieder auf:

$$\left. \begin{array}{l} 3. \text{ Gleichung : } x_3 - \mu = 0 \Rightarrow x_3 = \mu \\ 2. \text{ Gleichung : } x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3 = \mu \\ 1. \text{ Gleichung : } x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \mu \end{array} \right\} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Eig}_B(4) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir wie anfangs erwähnt den Eigenvektor $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ unmittelbar erkennen, können wir dies auch

sofort erschließen; wir wissen ja nach oben, daß $\dim(\text{Eig}_B(4)) = 1 \Rightarrow v \neq 0$ ist Basisvektor des eindimensionalen Eigenraum zu $\lambda_2 = 4 \Rightarrow \text{Eig}_B(4) = \mathbb{R} \cdot v$.

Zu Aufgabe 54:

Für welche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ diagonalisierbar?

Dazu:

Nach Definition ist eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \text{ ähnlich ist, d.h. wenn es eine invertierbare Matrix } S \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \text{ gibt,}$$

so daß $D = S^{-1} \cdot A \cdot S$ gilt.

Nach Vorlesung (6.19) ist das gleichwertig damit, daß

- das charakteristische Polynom χ_A in Linearfaktoren zerfällt, d.h. es $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ gibt, so daß $\chi_A(z) = (z - \lambda_1)^{k_1} \dots (z - \lambda_m)^{k_m}$ für alle $z \in \mathbb{K}$, mit natürlichen Zahlen k_1, \dots, k_m (die k_i ($1 \leq i \leq m$) sind die algebraischen Vielfachheiten der Nullstellen λ_i des Polynoms χ_A , wie in Aufgabe (53))

und

- für jeden Eigenwert λ_i ($1 \leq i \leq m$) von A gilt:
(geometrische Vielfachheit von λ_i) := $\dim(\text{Eig}_A(\lambda_i)) = k_i$ = (algebraische Vielfachheit von λ_i).

Um dies zu untersuchen, berechnen wir das charakteristische Polynom von A :

$$\begin{aligned}\chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda \cdot E_3) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & \alpha & \beta \\ 0 & 2 & \gamma \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & \alpha & \beta \\ 0 & 2-\lambda & \gamma \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Aufgabe (49)(a)}}{=} (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \\ &= -(2-\lambda)^2(\lambda+1)\end{aligned}$$

\Rightarrow das charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren, $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ sind die Eigenwerte von A , und die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist $k_1 = 1$, die von λ_2 ist $k_2 = 2$.

Da jede Nullstelle λ_i des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ ein Eigenwert von A ist, und es damit wie in Aufgabe (53) nach Definition von „Eigenwert“ einen Vektor $0 \neq x \in \text{Eig}_A(\lambda_i)$ gibt, ist $\text{Eig}_A(\lambda_i) \neq \{0\} \Rightarrow \dim(\text{Eig}_A(\lambda_i)) \geq 1$.

Damit ist insbesondere

$$1 = k_1 = (\text{algebraische Vielfachheit von } \lambda_1) \stackrel{\text{Satz (6.18)}}{\geq} (\text{geometrische Vielfachheit von } \lambda_1) \geq 1$$

\Rightarrow algebraische Vielfachheit von λ_1 = geometrische Vielfachheit von $\lambda_1 = 1$.

Der Eigenwert $\lambda_1 = -1$ erfüllt also alle Bedingungen, die für die Diagonalisierbarkeit von A gelten müssen.

Ob A diagonalisierbar ist, entscheidet sich damit am zweiten Eigenwert $\lambda_2 = 2$. Dessen algebraische Vielfachheit ist $k_2 = 2$, und aufgrund des obigen Kriteriums gilt:

A ist diagonalisierbar

$$\iff (\text{algebraische Vielfachheit von } \lambda_2) = 2 = (\text{geometrische Vielfachheit von } \lambda_2)$$

$$\iff \dim(\text{Eig}_A(\lambda_2)) = 2.$$

Wir müssen also den Eigenraum $\text{Eig}_A(2)$ bestimmen. d.h. den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $(A - 2 \cdot E_3)x = 0 \iff$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \cdot x = 0.$$

Dazu bringen wir diese Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II + \frac{1}{3}\gamma \cdot III \\ I + \frac{1}{3}\beta \cdot II}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{II \leftrightarrow III \\ -\frac{1}{3} \cdot II}} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Falls $\alpha \neq 0$ ist dies die Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } \text{rang}(A - 2E_3) = 2 \implies \dim(\text{Eig}_A(2)) = 3 - 2 = 1 \neq 2.$$

Falls $\alpha = 0$ müssen wir weiter umformen:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d.h. } \text{rang}(A - 2E_3) = 1 \implies \dim(\text{Eig}_A(2)) = 3 - 1 = 2.$$

Die Dimension von $\text{Eig}_A(2) = 2$ also genau dann, wenn $\alpha = 0$. Damit ergibt sich als Ergebnis:

$$A \text{ diagonalisierbar} \iff \alpha = 0 \wedge (\beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ beliebig}).$$

Zu Aufgabe 55:

Man bestimme für $\varphi \in \mathbb{R}$ die reellen bzw. komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren der Drehmatrix

$$Q := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Dazu:

Um die Eigenwerte von Q zu bestimmen, berechnen wir uns das charakteristische Polynom $\chi_Q(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \chi_Q(\lambda) &= \det(Q - \lambda \cdot E_2) = \det \left(\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi - \lambda & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi \quad (\star) . \end{aligned}$$

Die Eigenwertgleichung

$$\chi_Q(\lambda) = 0 \iff (\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi = 0$$

ist nur dann reell lösbar, wenn $(\cos \varphi - \lambda)^2 = 0 \wedge \sin^2 \varphi = 0 \iff \lambda = \cos \varphi \wedge \sin \varphi = 0$.

Letzteres bedeutet nach Analysis: $\sin \varphi = 0 \iff \varphi = \pi \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Falls $\varphi = 2k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$:

$$\cos(2\pi k) = 1 \implies Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\star)} \chi_Q(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \implies 1 \text{ ist zweifacher Eigenwert;}$$

$$0 = (Q - \lambda \cdot E_2) \cdot x = (E_2 - 1 \cdot E_2) \cdot x = 0 \cdot x$$

hat ganz \mathbb{R}^2 als Lösungsmenge, also: $\text{Eig}_Q(1) = \mathbb{R}^2$.

Die Eigenvektoren sind damit alle Elemente aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Falls $\varphi = (2k + 1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$:

$$\cos(2k + 1)\pi = \cos \pi = -1 \implies Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\star)} \chi_Q(\lambda) = (\lambda + 1)^2 \implies -1 \text{ ist zweifacher Eigenwert;}$$

$$0 = (Q - \lambda \cdot E_2) \cdot x = (-E_2 + 1 \cdot E_2) \cdot x = 0 \cdot x$$

hat ganz \mathbb{R}^2 als Lösungsmenge, also: $\text{Eig}_Q(-1) = \mathbb{R}^2$.

Die Eigenvektoren sind damit alle Elemente aus $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Falls $\varphi \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$:

In diesem Fall ist $\sin \varphi \neq 0$, d.h. (\star) hat keine reellen Lösungen: $(\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi > 0$.

$$0 = (\cos \varphi - \lambda)^2 + \sin^2 \varphi \stackrel{-i^2=1}{=} (\cos \varphi - \lambda)^2 - i^2 \sin^2 \varphi \stackrel{\substack{\uparrow \\ a^2 - b^2 = \\ (a-b)(a+b)}}{=} (\cos \varphi - \lambda - i \sin \varphi) \cdot (\cos \varphi - \lambda + i \sin \varphi)$$

Damit folgt für die (komplexen) Nullstellen:

$$\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \wedge \quad \lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi .$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1 = \cos \varphi + i \sin \varphi$:

Man löse das lineare Gleichungssystem

$$(Q - \lambda_1 E_2) \cdot x = 0 \iff \begin{pmatrix} \cos \varphi - (\cos \varphi + i \sin \varphi) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix} \cdot x = 0.$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi - (\cos \varphi + i \sin \varphi) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - (\cos \varphi + i \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i \sin \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & -i \sin \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{I+II} \begin{pmatrix} \sin \varphi & -i \sin \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weil $\sin \varphi \neq 0$ ist dies die Zeilenstufenform, und man erhält als Lösung mit $x_2 = \mu \in \mathbb{C}$ als freiem Parameter:

$$\sin \varphi \cdot x_1 - i \sin \varphi \cdot \mu = 0 \xrightarrow{\sin \varphi \neq 0} x_1 - i\mu = 0 \implies x_1 = i\mu \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\text{Eig}_Q(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, und die Eigenvektoren sind $x = \mu \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Zu $\lambda_2 = \cos \varphi - i \sin \varphi$:

Man löse das lineare Gleichungssystem

$$(Q - \lambda_2 E_2) \cdot x = 0 \iff \begin{pmatrix} \cos \varphi - (\cos \varphi - i \sin \varphi) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - (\cos \varphi - i \sin \varphi) \end{pmatrix} \cdot x = 0.$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi - (\cos \varphi - i \sin \varphi) & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi - (\cos \varphi - i \sin \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \sin \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & i \sin \varphi \end{pmatrix} \xrightarrow[I \leftrightarrow II]{I-iII} \begin{pmatrix} \sin \varphi & +i \sin \varphi \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weil $\sin \varphi \neq 0$ ist dies wieder die Zeilenstufenform, und man erhält als Lösung mit $x_2 = \mu \in \mathbb{C}$ als freiem Parameter:

$$\sin \varphi \cdot x_1 + i \sin \varphi \cdot \mu = 0 \xrightarrow{\sin \varphi \neq 0} x_1 + i\mu = 0 \implies x_1 = -i\mu \implies x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\text{Eig}_Q(\cos \varphi - i \sin \varphi) = \mathbb{C} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, und die Eigenvektoren sind $x = \mu \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$)

Zu Aufgabe 56:

Es sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann gilt:

(a) Ist A oder B invertierbar, so gilt $\chi_{A \cdot B} = \chi_{B \cdot A}$ und $A \cdot B$ besitzt dieselben Eigenwerte wie $B \cdot A$.

$$(b) \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E_n & B \\ A & \lambda \cdot E_n \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

und man folgere (a) ohne die Voraussetzung A oder B invertierbar.

Ad (a):

Wir setzen zunächst voraus, daß A invertierbar ist.

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{K} : \quad \chi_{A \cdot B}(\lambda) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \det(AB - \lambda \cdot E_n) \\ &\stackrel{E_n = AA^{-1}}{=} \det(AB - \lambda \cdot (A \cdot A^{-1})) \\ &\stackrel{\lambda(AA^{-1}) = A(\lambda A^{-1})}{=} \det(AB - A(\lambda \cdot A^{-1})) \\ &\stackrel{\text{Distrib.}}{=} \det(A \cdot (B - \lambda \cdot A^{-1})) \\ &\stackrel{\text{Multiplikations-}}{\stackrel{\text{satz}}{=}} \det(A) \cdot \det(B - \lambda \cdot A^{-1}) \\ &\stackrel{\text{Komm.}}{\stackrel{\text{in } (\mathbb{K}, \cdot)}{=}} \det(B - \lambda \cdot A^{-1}) \cdot \det(A) \\ &\stackrel{\text{Multiplikations-}}{\stackrel{\text{satz}}{=}} \det((B - \lambda \cdot A^{-1}) \cdot A) \\ &\stackrel{\text{Distrib.}}{=} \det(BA - (\lambda \cdot A^{-1})A) \\ &= \det(BA - \lambda(A^{-1}A)) \\ &= \det(BA - \lambda E_n) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \chi_{B \cdot A}(\lambda) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Ist nun B invertierbar, so vertauschen wir die Rollen von A und B im obigen Beweis:

Setze $A_1 := B, B_1 := A$, so ist A_1 invertierbar, und aus dem Beweis oben folgt:

$$\chi_{B \cdot A}(\lambda) = \chi_{A_1 \cdot B_1}(\lambda) \stackrel{A_1 \text{ invertierbar}}{=} \chi_{B_1 \cdot A_1}(\lambda) = \chi_{A \cdot B}(\lambda) \quad \text{q.e.d.}$$

Damit haben $A \cdot B$ und $B \cdot A$ dieselben Eigenwerte, da diese ja die Nullstellen des charakteristischen Polynomes sind.

Ad (b):

Wenn wir sukzessive in der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda \cdot E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$ die erste und die $(n+1)$ -te Zeile, sodann die zweite und die $(n+2)$ -te Zeile, ..., die i -te und die $(n+i)$ -te Zeile, ... und schließlich die n -te und die $(2n)$ -te Zeile vertauschen, so geht $\begin{pmatrix} \lambda \cdot E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$ über in die Matrix $\begin{pmatrix} B & E_n \\ \lambda \cdot E_n & A \end{pmatrix}$.

Da bei jeder Zeilenvertauschung die Determinante der zugehörigen Matrix ihr Vorzeichen ändert und n Zeilenvertauschungen ausgeführt werden, folgt:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \cdot E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} B & E_n \\ \lambda \cdot E_n & A \end{pmatrix}.$$

Nun gehen wir genauso bezüglich der Spalten vor: wir vertauschen in der Matrix $\begin{pmatrix} B & E_n \\ \lambda \cdot E_n & A \end{pmatrix}$ sukzessive die erste und die $(n+1)$ -te Spalte, die zweite und die $(n+2)$ -te Spalte, ..., die i -te und die $(n+i)$ -te Spalte, ... und zuletzt die n -te und die $(2n)$ -te Spalte; dabei geht die Matrix $\begin{pmatrix} B & E_n \\ \lambda \cdot E_n & A \end{pmatrix}$ über in die Matrix $\begin{pmatrix} E_n & B \\ A & \lambda \cdot E_n \end{pmatrix}$.

Wieder ändert bei jeder Spaltenvertauschung die Determinante der zugehörigen Matrix ihr Vorzeichen, und wieder werden n Vertauschungen durchgeführt. Also wie oben:

$$\det \begin{pmatrix} B & E_n \\ \lambda \cdot E_n & A \end{pmatrix} = (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} E_n & B \\ A & \lambda \cdot E_n \end{pmatrix}$$

Insgesamt gilt also:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \cdot E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix} = (-1)^n (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} E_n & B \\ A & \lambda \cdot E_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E_n & B \\ A & \lambda \cdot E_n \end{pmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{K}) \quad (\bullet) \quad .$$

Nun wollen wir die Aussage aus Teil (a) erneut beweisen, allerdings ohne die Voraussetzung, daß A oder B invertierbar ist.

Falls $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \chi_{A \cdot B}(0) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \det(AB - 0 \cdot E_n) = \det(AB) \stackrel{\text{Multipl.-satz}}{=} \det(A) \cdot \det(B) \\ &\stackrel{\text{in } \mathbb{K}}{=} \det(B) \cdot \det(A) \stackrel{\text{Multipl.-satz}}{=} \det(BA) = \det(BA - 0 \cdot E_n) \\ &= \chi_{B \cdot A}(0) \end{aligned}$$

Falls $\lambda \neq 0$:

Wegen Aufgabe (52) gilt mit $E_n \cdot A = A \cdot E_n$ und da E_n invertierbar ist:

$$\det \begin{pmatrix} E_n & B \\ A & \lambda \cdot E_n \end{pmatrix} = \det(E_n \cdot (\lambda E_n) - AB) = \det(\lambda \cdot E_n - AB) \quad (\star) \quad .$$

Ebenso folgt mit $\lambda \neq 0$, daß $\lambda \cdot E_n$ invertierbar ist und wegen $(\lambda E_n) \cdot B = B \cdot (\lambda E_n)$ liefert wieder Aufgabe (52):

$$\det \begin{pmatrix} \lambda \cdot E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix} = \det((\lambda E_n) \cdot E_n - BA) = \det(\lambda \cdot E_n - BA) \quad (\star\star) \quad .$$

Damit aber folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned} \chi_{A \cdot B}(\lambda) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \det(AB - \lambda \cdot E_n) = \det((-1) \cdot (\lambda \cdot E_n - AB)) \stackrel{\text{Vorl. (5.6) (a)}}{=} (-1)^n \cdot \det(\lambda \cdot E_n - AB) \\ &\stackrel{(\star)}{=} (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} E_n & B \\ A & \lambda \cdot E_n \end{pmatrix} \stackrel{(\bullet)}{=} (-1)^n \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda \cdot E_n & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(\star\star)}{=} (-1)^n \cdot \det(\lambda \cdot E_n - BA) \stackrel{\text{Vorl. (5.6) (a)}}{=} \det((-1) \cdot (\lambda \cdot E_n - BA)) \\ &= \det(BA - \lambda \cdot E_n) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \chi_{B \cdot A}(\lambda) \end{aligned}$$

Also: $\forall \lambda \in \mathbb{K} : \chi_{A \cdot B}(\lambda) = \chi_{B \cdot A}(\lambda) \implies \chi_{A \cdot B} = \chi_{B \cdot A} \quad \text{q.e.d.}$