

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 3

Zu Aufgabe 9:

Zunächst untersuchen wir, ob die angegebenen Definitionen sinnvoll sind (Definition der Funktionen wie auf dem Aufgabenblatt):

In $g_2(x_1, x_2) = (f_2(x_2), f_4(x_1))$ ist gemäß Festlegung des Definitionsbereichs von g_2 als $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ $x_1 \neq 0$. Damit ist $f_4(x_1)$ wohldefiniert, da ja f_4 nur auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ erklärt ist.

Auch die Verknüpfungen sind sinnvoll:

$$\begin{aligned} \text{Ad } f_1 \circ f_2 \circ f_4 &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{f_4} \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}, & \text{d.h. } f_1 \circ f_2 \circ f_4 &: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Ad } f_3 \circ f_2 \circ h &: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R} \xrightarrow{f_3} \mathbb{R}, & \text{d.h. } f_3 \circ f_2 \circ h &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Ad } f_2 \circ h \circ g_1 &: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{R} \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}, & \text{d.h. } f_2 \circ h \circ g_1 &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{Ad } g_1 \circ g_2 &: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \xrightarrow{g_2} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g_1} \mathbb{R}^2, & \text{d.h. } g_1 \circ g_2 &: (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Berechnung der Verknüpfungen:

- $\forall \mathbb{R} \ni x \neq 0$:

$$\begin{aligned} (f_1 \circ f_2 \circ f_4)(x) &\stackrel{\text{Def.}}{=} f_1(f_2(f_4(x))) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_1(f_2(\tfrac{1}{x})) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_1\left(\left(\tfrac{1}{x}\right)^2\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_1(y) \stackrel{\substack{f_2(y)=y^2 \text{ mit} \\ y=\frac{1}{x}}}{=} f_1(y) \stackrel{\substack{f_1(y)=y/2 \text{ mit} \\ y=(\frac{1}{x})^2}}{=} \frac{1}{2x^2} \\ &= \frac{\frac{1}{x^2}}{2} = \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (f_3 \circ f_2 \circ h)(x_1, x_2) &\stackrel{\text{Def.}}{=} f_3(f_2(h(x_1, x_2))) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_3(f_2(x_1 + x_2)) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_3(y) \stackrel{\substack{f_2(y)=y^2 \text{ mit} \\ y=x_1+x_2}}{=} f_3(y) \stackrel{\substack{f_3(y)=-y \text{ mit} \\ y=(x_1+x_2)^2}}{=} -(x_1 + x_2)^2 \\ &= -(x_1 + x_2)^2 \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (f_2 \circ h \circ g_1)(x_1, x_2) &\stackrel{\text{Def.}}{=} f_2(h(g_1(x_1, x_2))) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_2(h(f_1(x_1), f_3(x_2))) \stackrel{\text{Def. } f_1 \text{ und } f_3}{=} f_2\left(h\left(\frac{x_1}{2}, -x_2\right)\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} f_2\left(\frac{x_1}{2} - x_2\right) \\ &= f_2\left(\frac{x_1}{2} - x_2\right) = \left(\frac{x_1}{2} - x_2\right)^2 \end{aligned}$$

- $\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (g_1 \circ g_2)(x_1, x_2) &\stackrel{\text{Def.}}{=} g_1(g_2(x_1, x_2)) \stackrel{\text{Def. } g_2}{=} g_1(f_2(x_2), f_4(x_1)) \stackrel{\text{Def.}}{=} g_1\left(x_2^2, \frac{1}{x_1}\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} g_1\left(x_2^2, f_3\left(\frac{1}{x_1}\right)\right) \stackrel{\text{Def.}}{=} g_1\left(x_2^2, -\frac{1}{x_1}\right) \\ &= \left(\frac{x_2^2}{2}, -\frac{1}{x_1}\right) \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 10:

Für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ ist zu zeigen, daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

eine Umkehrabbildung besitzt; diese ist zu bestimmen.

Nach Definition und Satz 0.30 ist zu zeigen, daß es eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gibt mit den beiden Eigenschaften $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$ und $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

Auffinden der Umkehrfunktion:

Wenn g existiert, so gilt für alle $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(y_1, y_2) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \wedge (y_1, y_2) = (f \circ g)(y_1, y_2) = f(g(y_1, y_2)) = f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2).$$

Dann folgt aber mit den Eigenschaften des geordneten Paares (siehe Aufgabe 6(a)) :

$$y_1 = ax_1 + bx_2 \wedge y_2 = cx_1 + dx_2$$

Multiplizieren wir die erste Gleichung mit d und die zweite mit b , so erhalten wir:

$$dy_1 = d(ax_1 + bx_2) = adx_1 + bdx_2 \quad \wedge \quad by_2 = b(cx_1 + dx_2) = bcx_1 + bdx_2$$

$$\Rightarrow dy_1 - by_2 = [adx_1 + \cancel{bdx_2}] - [bcx_1 + \cancel{bdx_2}] = (ad - bc)x_1 \quad (1).$$

Nun multiplizieren wir die erste Gleichung mit c und die zweite mit a , und wir bekommen:

$$cy_1 = c(ax_1 + bx_2) = acx_1 + bcx_2 \quad \wedge \quad ay_2 = a(cx_1 + dx_2) = acx_1 + adx_2$$

$$\Rightarrow ay_2 - cy_1 = [\cancel{acx_1} + adx_2] - [\cancel{acx_1} + bcx_2] = (ad - bc)x_2 \quad (2).$$

Nun ist nach Voraussetzung $ad - bc \neq 0$, so daß wir dividieren dürfen:

$$(1) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{ad - bc} \cdot (dy_1 - by_2) \quad \text{und}$$

$$(2) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{ad - bc} \cdot (ay_2 - cy_1)$$

Also folgt für g (wenn es existiert) :

$$g(y_1, y_2) = \left(\frac{1}{ad - bc} \cdot (dy_1 - by_2), \frac{1}{ad - bc} \cdot (ay_2 - cy_1) \right) \quad (\clubsuit)$$

Verifikation:

Wir haben bisher nur berechnet, wie g aussehen muß, wenn es existiert. Wir müssen noch die beiden definierenden Eigenschaften der Umkehrfunktion aus Definition 0.30 nachweisen:

- **ad $f \circ g = id_{\mathbb{R}^2}$:** Seien $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig; dann gilt:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(y_1, y_2) &= f(g(y_1, y_2)) \stackrel{(\clubsuit)}{=} f\left(\frac{1}{ad - bc} \cdot (dy_1 - by_2), \frac{1}{ad - bc} \cdot (ay_2 - cy_1)\right) \\ &\stackrel{\text{Def. } f}{=} \left(a \cdot \left[\frac{1}{ad - bc}(dy_1 - by_2)\right] + b \cdot \left[\frac{1}{ad - bc}(ay_2 - cy_1)\right], c \cdot \left[\frac{1}{ad - bc}(dy_1 - by_2)\right] + d \cdot \left[\frac{1}{ad - bc}(ay_2 - cy_1)\right]\right) \\ &= \left(\frac{a}{ad - bc} \cdot (dy_1 - by_2) + \frac{b}{ad - bc} \cdot (ay_2 - cy_1), \frac{c}{ad - bc} \cdot (dy_1 - by_2) + \frac{d}{ad - bc} \cdot (ay_2 - cy_1)\right) \\ &= \left(\frac{1}{ad - bc} (ady_1 - \cancel{aby_2} + \cancel{bay_2} - bcy_1), \frac{1}{ad - bc} (\cancel{cdy_1} - cby_2 + \cancel{day_2} - \cancel{dcy_1})\right) \\ &= \left(\frac{1}{ad - bc} (ad - bc) \cdot y_1, \frac{1}{ad - bc} (-cb + da) \cdot y_2\right) \\ &\stackrel{\text{Kürzen}}{=} (y_1, y_2) \end{aligned}$$

- **ad $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$:** Seien $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ beliebig; dann gilt:

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x_1, x_2) &\stackrel{\text{Def.}}{=} g(ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2) = \\
 &\stackrel{(\star)}{=} \left(\frac{1}{ad-bc} [d \cdot (ax_1 + bx_2) - b \cdot (cx_1 + dx_2)], \frac{1}{ad-bc} \cdot [a \cdot (cx_1 + dx_2) - c \cdot (ax_1 + bx_2)] \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{ad-bc} [dax_1 + \cancel{dbx_2} - bcx_1 - \cancel{bdcx_2}], \frac{1}{ad-bc} \cdot [\cancel{acx_1} + adx_2 - \cancel{acx_1} - cbx_2] \right) = \\
 &= \left(\frac{1}{ad-bc} \cdot (da-bc) \cdot x_1, \frac{1}{ad-bc} \cdot (ad-cb) \cdot x_2 \right) = \\
 &\stackrel{\text{Kür-}}{=} \stackrel{\text{zen}}{(x_1, x_2)} \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 11: Die Elemente der Gruppe S_3 seien wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- a) Um die Verknüpfungstafel aufzustellen, müssen wir alle möglichen Produkte (d.h. Hintereinanderausführungen) von Elementen der S_3 bilden, d.h. alle $f \circ g$ mit $f, g \in \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Offensichtlich ist ρ_1 die Identitätsabbildung auf $\{1, 2, 3\}$, d.h. das neutrale Element der Gruppe (S_3, \circ) ; damit gilt sofort $\rho_1 \circ f = f \circ \rho_1 = f$ für alle Gruppenelemente f .

Zudem wissen wir, daß für eine Gruppe (G, \circ) mit neutralem Element e gilt:

$$\forall a, b \in G : a \circ b = e \implies b = a^{-1} \text{ und damit } b \circ a = e \quad (\blacksquare)$$

Beweis: Es gelte $a \circ b = e$; dann folgt:

$$\begin{aligned}
 b &\stackrel{\text{neutral}}{=} e \circ b \stackrel{\text{Existenz}}{=} \stackrel{\text{Inverses}}{(a^{-1} \circ a) \circ b} \stackrel{\text{assoz.}}{=} a^{-1} \circ (a \circ b) \stackrel{\text{Voraus.}}{=} a^{-1} \circ e \stackrel{\text{neutral}}{=} a^{-1} \\
 \text{Damit: } b \circ a &= a^{-1} \circ a \stackrel{\text{Def.}}{=} e \quad \text{q.e.d.}
 \end{aligned}$$

Berechnen wir zuerst die Quadrate $f \circ f$:

$$\left. \begin{aligned}
 (\rho_2 \circ \rho_2)(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} (1) = 3 \\
 (\rho_2 \circ \rho_2)(2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} (2) = 1 \\
 (\rho_2 \circ \rho_2)(3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & \downarrow & \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} (3) = 2
 \end{aligned} \right\} \implies \rho_2 \circ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \rho_3.$$

Die Abbildungsvorschrift ist dabei:

$$\begin{aligned}
 (\rho_2 \circ \rho_2)(1) &= \rho_2(\rho_2(1)) = \rho_2(2) = 3 \text{ nach Definition von } \rho_2. \text{ Ebenso:} \\
 (\rho_2 \circ \rho_2)(2) &= \rho_2(3) = 1 \quad \text{und} \\
 (\rho_2 \circ \rho_2)(3) &= \rho_2(1) = 2.
 \end{aligned}$$

So verfährt man auch mit den anderen Kompositionen und erhält:

$$\rho_3^2 = \rho_3 \circ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \rho_2$$

$$\tau_1^2 = \tau_1 \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id = \rho_1$$

$$\tau_2^2 = \tau_2 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id = \rho_1$$

$$\tau_3^2 = \tau_3 \circ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id = \rho_1$$

Nun bestimmen wir die noch ausstehenden Produkte von ρ_2 mit den anderen Gruppenelementen:

$$\rho_2 \circ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id = \rho_1 \xRightarrow{(\blacksquare)} \rho_3 \circ \rho_2 = id = \rho_1$$

$$\rho_2 \circ \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \tau_3$$

$$\rho_2 \circ \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_1$$

$$\rho_2 \circ \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau_2$$

Wir bestimmen noch

$$\tau_1 \circ \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau_2$$

und erhalten damit folgende (noch unvollständige) Verknüpfungstafel:

\circ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	τ_3	τ_1	τ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2			
τ_1	τ_1	τ_2		ρ_1		
τ_2	τ_2				ρ_1	
τ_3	τ_3					ρ_1

Die verbleibenden Leerstellen der Tabelle können wir nun über die schon bekannten Verknüpfungen berechnen (die jeweiligen Ersetzungen sind der Tabelle oder schon bestimmten Kompositionen zu entnehmen):

$$\rho_3 \circ \tau_1 = \rho_3 \circ (\rho_2 \circ \tau_2) = (\rho_3 \circ \rho_2) \circ \tau_2 = \rho_1 \circ \tau_2 = \tau_2$$

$$\rho_3 \circ \tau_2 = \rho_3 \circ (\rho_2 \circ \tau_3) = (\rho_3 \circ \rho_2) \circ \tau_3 = \rho_1 \circ \tau_3 = \tau_3$$

$$\rho_3 \circ \tau_3 = \rho_3 \circ (\rho_2 \circ \tau_1) = (\rho_3 \circ \rho_2) \circ \tau_1 = \rho_1 \circ \tau_1 = \tau_1$$

$$\tau_2 \circ \rho_2 = (\rho_3 \circ \tau_1) \circ \rho_2 = \rho_3 \circ (\tau_1 \circ \rho_2) = \rho_3 \circ \tau_2 = \tau_3$$

$$\tau_3 \circ \rho_2 = (\rho_2 \circ \tau_1) \circ \rho_2 = \rho_2 \circ (\tau_1 \circ \rho_2) = \rho_2 \circ \tau_2 = \tau_1$$

$$\tau_1 \circ \rho_3 = (\tau_3 \circ \rho_2) \circ \rho_3 = \tau_3 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = \tau_3 \circ id = \tau_3$$

$$\tau_1 \circ \tau_2 = \tau_1 \circ (\tau_1 \circ \rho_2) = (\tau_1 \circ \tau_1) \circ \rho_2 = id \circ \rho_2 = \rho_2$$

$$\begin{aligned}
\tau_1 \circ \tau_3 &= \tau_1 \circ (\tau_1 \circ \rho_3) = (\tau_1 \circ \tau_1) \circ \rho_3 = id \circ \rho_3 = \rho_3 \\
\tau_2 \circ \rho_3 &= (\tau_1 \circ \rho_2) \circ \rho_3 = \tau_1 \circ (\rho_2 \circ \rho_3) = \tau_1 \circ id = \tau_1 \\
\tau_2 \circ \tau_1 &= (\tau_1 \circ \rho_2) \circ \tau_1 = \tau_1 \circ (\rho_2 \circ \tau_1) = \tau_1 \circ \tau_3 = \rho_3 \\
\tau_2 \circ \tau_3 &= (\tau_1 \circ \rho_2) \circ \tau_3 = \tau_1 \circ (\rho_2 \circ \tau_3) = \tau_1 \circ \tau_2 = \rho_2 \\
\tau_3 \circ \rho_3 &= (\rho_2 \circ \tau_1) \circ \rho_3 = \rho_2 \circ (\tau_1 \circ \rho_3) = \rho_2 \circ \tau_3 = \tau_2 \\
\tau_3 \circ \tau_1 &= (\rho_2 \circ \tau_1) \circ \tau_1 = \rho_2 \circ (\tau_1 \circ \tau_1) = \rho_2 \circ id = \rho_2 \\
\tau_3 \circ \tau_2 &= (\rho_2 \circ \tau_1) \circ \tau_2 = \rho_2 \circ (\tau_1 \circ \tau_2) = \rho_2 \circ \rho_2 = \rho_3
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die nun vollständige Verknüpfungstabelle:

\circ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	τ_3	τ_1	τ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1

Dabei bezeichnet der doppelt umrandete Teil der Tabelle die Verknüpfungen einer Untergruppe, nämlich der von den Elementen ρ_1, ρ_2, ρ_3 erzeugten Untergruppe U .

b) Wie man an der Verknüpfungstafel erkennt, gilt zum Beispiel

$$\tau_1 \circ \rho_2 = \tau_2, \quad \text{aber} \quad \rho_2 \circ \tau_1 = \tau_3.$$

und natürlich ist $\tau_2 \neq \tau_3$. Damit ist belegt, daß die Gruppe nicht kommutativ ist. Dies erkennt man unmittelbar an der Verknüpfungstabelle, und zwar daran, daß diese nicht symmetrisch zur Hauptdiagonalen ist:

\circ	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1	τ_3	τ_1	τ_2
ρ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_2	τ_2	τ_3	τ_1
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
τ_2	τ_2	τ_3	τ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_2
τ_3	τ_3	τ_1	τ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_1

Im Gegensatz dazu ist die oben erwähnte Untergruppe U kommutativ

c) Es sind die Gleichungen $\rho_3 \circ \pi = \tau_1$ und $\sigma \circ \rho_3 = \tau_1$ in π und σ zu lösen.

Dies ist einfach über die Verknüpfungstabelle möglich, indem wir deren Aufbau beachten: An der Schnittstelle der j -ten Zeile und der k -ten Spalte steht das Produkt $j \circ k$ mit $j, k \in \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$.

Also suchen wir in der Zeile zu ρ_3 diejenige Spalte, in der als Produktergebnis τ_1 auftritt. Das ist die letzte Spalte, also die Spalte zum Faktor τ_3 . Damit gilt: $\rho_3 \circ \tau_3 = \tau_1$, weshalb $\pi = \tau_3$ die gesuchte Lösung ist. (Aufgabe 12 wird zeigen, daß dies die einzige Lösung ist.)

Genauso verfahren wir für die zweite Gleichung: Wir suchen in der Spalte zu ρ_3 diejenige Zeile auf, in der τ_1 auftritt. Das ist die zu τ_2 gehörige Zeile. Damit gilt: $\tau_2 \circ \rho_3 = \tau_1 \implies \sigma = \tau_2$.

Zu Aufgabe 12: Sei (G, \circ) eine Gruppe mit neutralem Element e .

a) Für alle $a, b \in G$ besitzt die Gleichung $a \circ x = b$ (\star) genau eine Lösung $x \in G$.

Beweis:

Es sind sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit der Lösung zu beweisen.

• **Existenz:**

Wenn $x \in G$ die Gleichung löst, d.h. $a \circ x = b$ gilt, so folgt:

$$x \stackrel{e}{=} e \circ x \stackrel{a^{-1} \text{ in-}}{\underset{\text{vers zu } a}{=}} (a^{-1} \circ a) \circ x \stackrel{\text{assoz.}}{=} a^{-1} \circ (a \circ x) \stackrel{\text{Voraus.}}{=} a^{-1} \circ b.$$

Wenn es also eine Lösung gibt, so kann dies nur $x = a^{-1} \circ b$ sein. Dies ist aber auch eine Lösung, denn:

$$a \circ (a^{-1} \circ b) \stackrel{\text{assoz.}}{=} (a \circ a^{-1}) \circ b \stackrel{a^{-1}}{\underset{\text{invers}}{=}} e \circ b \stackrel{e}{\underset{\text{neutral}}{=}} b.$$

• **Eindeutigkeit:**

Diese haben wir implizit schon im ersten Teil (Existenz) bewiesen, indem wir gezeigt haben, daß jede Lösung x die Gestalt $x = a^{-1} \circ b$ haben muß. Wir könnten auch so vorgehen:

Angenommen, die Gleichung (\star) habe zwei Lösungen $x_1, x_2 \in G$, d.h. $a \circ x_1 = b$ und $a \circ x_2 = b$. Dann folgt $a \circ x_1 = b = a \circ x_2$, d.h.

$$\begin{aligned} x_1 &\stackrel{e}{\underset{\text{neutral}}{=}} e \circ x_1 \stackrel{a^{-1}}{\underset{\text{invers}}{=}} (a^{-1} \circ a) \circ x_1 \stackrel{\text{assoz.}}{=} a^{-1} \circ (a \circ x_1) \stackrel{\text{Voraus.}}{=} a^{-1} \circ (a \circ x_2) = \\ &\stackrel{\text{assoz.}}{=} (a^{-1} \circ a) \circ x_2 \stackrel{a^{-1}}{\underset{\text{invers}}{=}} e \circ x_2 \stackrel{e}{\underset{\text{neutral}}{=}} x_2 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

b) Für jedes $a \in G$ ist die Abbildung

$$\varphi : G \rightarrow G, x \mapsto a \circ x$$

bijektiv.

Beweis:

Natürlich ist die Abbildung wohldefiniert, da für alle $a, x \in G$ wieder $a \circ x \in G$ gilt.

• **φ injektiv:**

Zu zeigen ist: $\forall x, y \in G : \varphi(x) = \varphi(y) \implies x = y$.

Seien also $x, y \in G$ mit $\varphi(x) = \varphi(y) \iff a \circ x = a \circ y$ (\star) .

Nach Teil (a) hat die Gleichung $a \circ x = b$ mit $b := a \circ y$ genau eine Lösung x , nämlich

$$x = a^{-1} \circ b = a^{-1} \circ (a \circ y) \stackrel{\text{assoz.}}{=} (a^{-1} \circ a) \circ y \stackrel{a^{-1}}{\underset{\text{neutral}}{=}} e \circ y = y \quad \text{q.e.d.}$$

• **φ surjektiv:**

Sei $b \in G$ beliebig; gesucht ist ein $x \in G$ mit $b = \varphi(x) = a \circ x$.

Wieder nach Teil (a) hat die Gleichung $a \circ x = b$ (genau) eine Lösung x , nämlich $x = a^{-1} \circ b$. Also gilt:

$$\forall b \in G : \varphi(a^{-1} \circ b) = a \circ (a^{-1} \circ b) \stackrel{\text{s.o.}}{=} b.$$

Also ist φ surjektiv q.e.d.