

**Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker**

**Blatt 10**

**Zu Aufgabe 37:**

Sei  $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  der Vektorraum der Abbildungen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit argumentweiser Definition der Addition und skalaren Multiplikation, d.h.

$$\left. \begin{array}{l} \forall f, g \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x) \\ \forall f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \end{array} \right\} \quad (\bullet)$$

Es seien

$$U_1 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\} \quad \wedge \quad U_2 := \{f \in \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\}$$

Teilmengen von  $V$ . Dann gilt:

- (a)  $U_1$  und  $U_2$  sind Untervektorräume von  $V$ .
- (b)  $U_1 + U_2 = V \quad \wedge \quad U_1 \cap U_2 = \{0\}$

**Beweis:**

**Ad (a):**

Es sind die Unterraumkriterien nachzuprüfen:

- (i)  $U \neq \emptyset$
- (ii)  $\forall a, b \in U : a + b \in U$
- (iii)  $\forall a \in U \quad \forall \lambda \in K : \lambda a \in U$

• **Zu  $U_1$  :**

– Definiere  $0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0 \in \mathbb{R} \implies \forall x \in \mathbb{R} : 0(x) = 0 = 0(-x) \implies 0 \in U_1$

– Seien  $f, g \in U_1 \implies \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \wedge g(-x) = g(x)$  ;  
dann folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (f + g)(-x) \stackrel{(\bullet)}{=} f(-x) + g(-x) \stackrel{f, g \in U_1}{=} f(x) + g(x) \stackrel{(\bullet)}{=} (f + g)(x) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{U_1}{\implies}} f + g \in U_1$$

– Seien  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f \in U_1$ , d.h.  $f(-x) = f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ;  
dann folgt:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(-x) \stackrel{(\bullet)}{=} \lambda \cdot f(-x) \stackrel{f \in U_1}{=} \lambda \cdot f(x) \stackrel{(\bullet)}{=} (\lambda \cdot f)(x) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{U_1}{\implies}} \lambda \cdot f \in U_1 .$$

• **Zu  $U_2$  :**

– Mit der Nullabbildung  $O$  von oben gilt wieder:

$$\forall x \in \mathbb{R} : O(-x) = 0 = -O(x) \implies O \in U_2$$

–  $f, g \in U_2 \implies \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \wedge g(-x) = -g(x)$  ;

dann folgt:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : (f+g)(-x) &\stackrel{(\bullet)}{=} f(-x) + g(-x) \stackrel{f, g \in U_2}{=} -f(x) - g(x) = \\ &= -(f(x) + g(x)) \stackrel{(\bullet)}{=} -(f+g)(x) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{U_2}{\implies}} f+g \in U_2 \end{aligned}$$

– Seien  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $f \in U_2$  , d.h.  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ;

dann folgt:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : (\lambda \cdot f)(-x) &\stackrel{(\bullet)}{=} \lambda \cdot f(-x) \stackrel{f \in U_2}{=} \lambda \cdot (-f(x)) = -(\lambda \cdot f(x)) \\ &\stackrel{(\bullet)}{=} -(\lambda \cdot f)(x) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{U_2}{\implies}} \lambda \cdot f \in U_2 \end{aligned}$$

**Ad (b):**

**$U_1 + U_2 = V$  :**

Klar ist  $U_1 + U_2 \subseteq V$  , da ja  $U_1, U_2$  Untervektorräume von  $V$  sind:

$$\forall u_1 \in U_1 \forall u_2 \in U_2 : u_1, u_2 \in V \stackrel{\text{Vektorraum}}{\implies} u_1 + u_2 \in V$$

Um  $V \subseteq U_1 + U_2$  zu zeigen, wählen wir ein beliebiges  $f \in V$  und definieren:

$g := f \circ (-id_{\mathbb{R}})$  , d.h.  $g(x) = f(-x)$  für alle  $x \in \mathbb{R} \implies g \in V$ .

Ferner sei  $F := \frac{1}{2}(f+g) \in V$  und  $G := \frac{1}{2}(f-g) \in V$  , d.h.

$$\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad \wedge \quad G(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) .$$

Es ist  $F \in U_1$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : F(-x) &= \frac{1}{2}(f+g)(-x) \stackrel{(\bullet)}{=} \frac{1}{2}(f(-x) + g(-x)) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{g}{=}} \frac{1}{2}(f(-x) + f(-(-x))) \\ &= \frac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{g}{=}} \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{\underset{F}{=}} F(x) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Des weiteren ist  $G \in U_2$  :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : G(-x) &= \frac{1}{2}(f-g)(-x) \stackrel{(\bullet)}{=} \frac{1}{2}(f(-x) - g(-x)) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{g}{=}} \frac{1}{2}(f(-x) - f(-(-x))) = \frac{1}{2}(f(-x) - f(x)) \\ &= -\frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \stackrel{\text{Def.}}{\underset{g}{=}} -\frac{1}{2}(f(x) - g(x)) \stackrel{(\bullet)}{=} -\frac{1}{2}(f-g)(x) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{\underset{G}{=}} -G(x) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Andererseits gilt.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : f(x) &= \frac{1}{2}(f(x) + f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + f(x) - g(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x)) + \frac{1}{2}(f(x) - g(x)) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{\underset{F, G}{=}} F(x) + G(x) \end{aligned}$$

$$\stackrel{F \in U_1}{\underset{G \in U_2}{\implies}} f = F + G \in U_1 + U_2$$

Da  $f \in V$  beliebig war, folgt insgesamt  $V \subseteq U_1 + U_2$  q.e.d.

$$U_1 \cap U_2 = \{0\} :$$

Klar ist  $\{0\} \subseteq U_1 \cap U_2$ , da ja jeder Untervektorraum den Nullvektor enthält.

Sei nun umgekehrt  $f \in U_1 \cap U_2 \implies f \in U_1 \wedge f \in U_2 \xrightarrow[\text{Def.}]{U_i}$

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \wedge f(-x) = -f(x) \implies f(x) = f(-x) = -f(x), \text{ d.h. } f(x) = -f(x)$$

$$\implies 2 \cdot f(x) = 0 \implies f(x) = 0$$

$$\implies f = 0 \implies f \in \{0\} \quad \text{q.e.d.}$$

### Zu Aufgabe 38:

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  mit der Basis  $b_1, b_2, b_3, b_4$  und  $U := \text{span}(a_1, a_2, a_3)$  mit  $a_1 = 2 \cdot b_1 - b_2$ ,  $a_2 = b_2 + b_3 + b_4$  und  $a_3 = b_3 - b_4$ . Dann:

(a)  $a_1, a_2, a_3$  ist eine Basis von  $U$ .

(b) Man ergänze  $a_1, a_2, a_3$  zu einer Basis von  $V$ .

#### Ad (a):

Zu zeigen ist:

(i)  $a_1, a_2, a_3$  ist ein Erzeugendensystem von  $U$ .

(ii)  $a_1, a_2, a_3$  ist linear unabhängig.

Zu (i): Da  $U = \text{span}(a_1, a_2, a_3)$  ist nach Definition (34)  $a_1, a_2, a_3$  ein Erzeugendensystem von  $U$ .

Zu (ii): Zu zeigen:  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 = 0 \xRightarrow{!} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

Es gelte also für  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ :

$$0 = \lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 \stackrel{\text{Def.}}{=} \lambda_1 (2b_1 - b_2) + \lambda_2 (b_2 + b_3 + b_4) + \lambda_3 (b_3 - b_4)$$

$$\stackrel{\text{ordnen}}{=} \stackrel{\text{nach } b_i}{=} 2\lambda_1 \cdot b_1 + (-\lambda_1 + \lambda_2) \cdot b_2 + (\lambda_2 + \lambda_3) \cdot b_3 + (\lambda_2 - \lambda_3) b_4 \quad (\star)$$

Nun sind die Vektoren  $b_1, b_2, b_3, b_4$  linear unabhängig und  $(\star)$  ist eine verschwindende Linearkombination der  $b_i \implies$  alle Koeffizienten in  $(\star)$  müssen 0 sein:

$$(I) \quad 2\lambda_1 = 0$$

$$(II) \quad -\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$(III) \quad \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$(IV) \quad \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$(I) \implies \lambda_1 = 0 \xrightarrow{(II)} \lambda_2 = \lambda_1 = 0 \xrightarrow{(III)} \lambda_3 = -\lambda_2 = 0, \text{ also } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

#### Ad (b):

Wir verwenden das Austauschlemma (Vorlesung (3.10)), um sukzessive geeignete Elemente der Basis  $b_1, b_2, b_3, b_4$  durch die Vektoren  $a_1, a_2, a_3$  zu ersetzen. Der Basisergänzungssatz (Vorlesung (3.11)) garantiert uns, daß es ein  $b_i \in \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$  gibt, so daß  $a_1, a_2, a_3, b_i$  eine Basis von  $V$  ist.

Das Austauschlemma besagt, daß für jede Basis  $c_1, \dots, c_n$  eines Vektorraums  $W$  ein beliebiger Vektor

$w \in W$  mit  $w = \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot c_j$  (\*) das Basiselement  $c_k$  ersetzen kann, wenn nur der Koeffizient  $\gamma_k$  in der

Basisdarstellung (\*) ungleich Null ist:

$$w = \sum_{j=1}^n \gamma_j \cdot c_j \wedge \gamma_k \neq 0 \implies c_1, \dots, c_{k-1}, w, c_{k+1}, \dots, c_n \text{ ist Basis von } W.$$

Nun ist nach Definition  $a_1 = 2 \cdot b_1 - b_2$ , der Koeffizient von  $b_1$  in der Basisdarstellung von  $a_1$  bzgl. der Basis  $b_1, b_2, b_3, b_4$  ist damit  $2 \neq 0 \implies b_1$  kann gegen  $a_1$  ausgetauscht werden:  $a_1, b_2, b_3, b_4$  ist eine Basis von  $V$ .

$a_2 = b_2 + b_3 + b_4 = 0 \cdot a_1 + b_2 + b_3 + b_4$  ist eine Basisdarstellung von  $a_2$  bezüglich der eben konstruierten Basis  $a_1, b_2, b_3, b_4$  von  $V$ ; nach dem Austauschlemma kann nun also  $b_2$  gegen  $a_2$  ausgetauscht werden: der Koeffizient bei  $b_2$  in der Basisdarstellung von  $a_2$  bezüglich der Basis  $a_1, b_2, b_3, b_4$  ist  $1 \neq 0$ ; damit ist  $a_1, a_2, b_3, b_4$  Basis von  $V$ .

$a_3 = b_3 - b_4 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + b_3 - b_4$  ist nun eine Basisdarstellung von  $a_3$  bezüglich der neuen Basis  $a_1, a_2, b_3, b_4$  und der Koeffizient bei  $b_3$  ist  $1 \neq 0 \implies$  wieder nach Austauschlemma kann  $b_3$  gegen  $a_3$  ausgetauscht werden und wir erhalten die Basis  $a_1, a_2, a_3, b_4$  von  $V$ .

Wir hätten analog auch  $b_4$  gegen  $a_3$  austauschen können (Koeffizient  $1 \neq 0$  bei  $b_4$ ); dann wäre das Resultat die Basis  $a_1, a_2, a_3, b_3$  gewesen.

Unser Vorgehen oben liefert also, daß  $a_1, a_2, a_3$  durch  $b_4$  oder  $b_3$  zu einer Basis von  $V$  ergänzt werden kann.

Wie man an der Konstruktion erkennt, ist das Verfahren keineswegs eindeutig. Wir hätten im ersten Schritt statt  $b_1$  gegen  $a_1$  auszutauschen auch benutzen können, daß der Koeffizient von  $b_2$  in  $a_1 = 2b_1 - b_2$  gleich  $-1 \neq 0$  ist, um dann  $b_2$  gegen  $a_1$  auszutauschen; dann bekommen wir im ersten Schritt die Basis  $b_1, a_1, b_3, b_4$  von  $V$ .

Dann im zweiten Schritt: weil  $a_1 = 2b_1 - b_2 \implies b_2 = 2b_1 - a_1$  können wir schreiben:

$a_2 = b_2 + b_3 + b_4 = (2b_1 - a_1) + b_3 + b_4 = 2b_1 - a_1 + b_3 + b_4$ , und das ist die Basisdarstellung von  $a_2$  bezüglich der Basis  $b_1, a_1, b_3, b_4$ . Weil nun die Koeffizienten sowohl von  $b_1$  als auch von  $b_3$  und  $b_4$  jeweils von Null verschieden sind, können wir jeden der Vektoren  $b_1, b_3, b_4$  gegen  $a_2$  austauschen. Wählen wir  $b_1$ , so erhalten wir als neue Basis  $a_2, a_1, b_3, b_4$ ; wählen wir  $b_3$ , so wird  $b_1, a_1, a_2, b_4$  die neue Basis; wählen wir  $b_4$ , so ist die resultierende Basis  $b_1, a_2, b_3, a_2$ . Analog haben wir im dritten Schritt Auswahlmöglichkeiten.

Führt man die Rechnungen aus, so erkennt man, daß in dieser Aufgabe jeder der Vektoren  $b_1, b_2, b_3, b_4$  als Ergänzungsvektor in Frage kommt.

Ein anderes, mehr auf „trial and error“ beruhendes Verfahren ist es, die Sicherheit, die uns der Basisergänzungssatz bietet, nämlich daß es einen Vektor  $b_i$  geben muß, so daß  $a_1, a_2, a_3, b_i$  eine Basis von  $V$  ist, zu nutzen und einfach einen Kandidaten unter den  $b_1, b_2, b_3, b_4$  zu wählen und zu prüfen, ob er  $a_1, a_2, a_3$  zu einer Basis ergänzt. Da mit  $b_1, b_2, b_3, b_4$  Basis von  $V$   $\dim(V) = 4$  ist, reicht es mit Vorlesung (Folgerung (3.14)) zu zeigen, daß  $a_1, a_2, a_3, b_i$  linear unabhängig sind. Testen wir das zum Beispiel mit der Ergänzung durch  $b_2$ :

$$\begin{aligned} \text{Seien } \lambda, \mu, \nu, \xi \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda a_1 + \mu a_2 + \nu a_3 + \xi b_2 = 0 &\xrightarrow[\text{Def.}]{a_i} \\ \lambda \cdot (2b_1 - b_2) + \mu \cdot (b_2 + b_3 + b_4) + \nu \cdot (b_3 - b_4) + \xi b_2 &\xrightarrow[\text{ordnen}]{\text{nach } b_i} \\ 2\lambda \cdot b_1 + (-\lambda + \mu + \xi) b_2 + (\mu + \nu) b_3 + (\mu - \nu) b_4 &\xrightarrow[\text{Basis}]{b_1, b_2, b_3, b_4} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{lcl} \text{(I)} & 2\lambda & = 0 \\ \text{(II)} & -\lambda & + \mu + \xi = 0 \\ \text{(III)} & & \mu + \nu = 0 \\ \text{(IV)} & & \mu - \nu = 0 \end{array} \right\} \quad \text{Damit:}$$

$$\text{(I)} \implies \lambda = 0$$

$$\text{(IV)} \implies \mu = \nu \xrightarrow[\text{(III)}]{\text{In}} \mu = -\nu = -\mu \implies 2\mu = 0 \implies \mu = 0 \xrightarrow[\text{(II)}]{\mu=\nu} \nu = 0 \xrightarrow[\text{(II)}]{\text{In}} \xi = 0.$$

Also  $\lambda = \mu = \nu = \xi = 0 \implies a_1, a_2, a_3, b_2$  linear unabhängig, also Basis von  $V$ .

Dieses Verfahren ist aber nicht konstruktiv, im Irrtumsfall ist es unter Umständen dreimal zu wiederholen. Das oben angegebene konstruktive Verfahren dagegen führt immer direkt zum Ziel.

### Zu Aufgabe 39:

Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -i & \lambda+i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  sind diejenigen Werte von  $\lambda$  zu bestimmen, für die  $A$  invertierbar ist.

Transformiert man  $A$  durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix  $R$ , so kann man, wie in Aufgabe (35) ausgeführt, an der Hauptdiagonalen von  $R$  erkennen, ob  $R$  und damit auch  $A$  invertierbar ist: tritt in der Hauptdiagonalen der Wert 0 nicht auf, so ist die Matrix  $A$  invertierbar, andernfalls nicht. Wir bringen also  $A$  auf obere Dreiecksgestalt:

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+i & 1-i & 2 \\ -i & \lambda+i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II-I+III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -i & \lambda+i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III+iI} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda+3i & 1+3i \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 3i+1 & 3i+1 \end{pmatrix} =: B \end{aligned}$$

**Falls**  $\lambda = 1$  :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i+1 & 3i+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3i+1 & 3i+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

d.h.  $R$  hat obere Dreiecksgestalt und eine Null in der Hauptdiagonalen, also ist  $R$  nicht invertierbar, und damit auch nicht  $A$ .

**Falls**  $\lambda \neq 1$  :

$$B \xrightarrow{\frac{1}{\lambda-1} \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3i+1 & 3i+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-(3i+1) \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3i+1 \end{pmatrix} = R$$

d.h.  $R$  hat obere Dreiecksgestalt und hat keine Null in der Hauptdiagonalen  $\implies R$  ist invertierbar und damit auch  $A$ .

Fazit:

$$A \text{ invertierbar} \iff \lambda \neq 1$$

#### Zu Aufgabe 40:

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $U_1, U_2$  Untervektorräume von  $V$ . Dann gilt:

$$U_1 \cup U_2 \text{ Untervektorraum von } V \iff U_1 \subseteq U_2 \text{ oder } U_2 \subseteq U_1$$

#### Beweis:

**Ad “ $\Leftarrow$ ”, :**

Falls  $U_1 \subseteq U_2$  folgt:  $U_2 \subseteq U_1 \cup U_2 \stackrel{U_1 \subseteq U_2}{\subseteq} U_2 \cup U_2 = U_2 \implies U_2 \subseteq U_1 \cup U_2 \wedge U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$

$\implies U_2 = U_1 \cup U_2$ , und da  $U_2$  Untervektorraum von  $V$  ist, ist es damit auch  $U_1 \cup U_2$ .

Falls  $U_2 \subseteq U_1$  folgt:  $U_1 \subseteq U_1 \cup U_2 \stackrel{U_2 \subseteq U_1}{\subseteq} U_1 \cup U_1 = U_1 \stackrel{\text{wie oben}}{\implies} U_1 = U_1 \cup U_2$ , und da  $U_1$  Untervektorraum von  $V$  ist, gilt dies auch für  $U_1 \cup U_2$ .

**Ad “ $\Rightarrow$ ”, :**

Nach Voraussetzung ist  $U_1 \cup U_2$  ein Untervektorraum von  $V$ .

Angenommen, es gilt  $\neg(U_1 \subseteq U_2)$  und  $\neg(U_2 \subseteq U_1)$ . Dann ist  $U_1 \setminus U_2 \neq \emptyset$  und  $U_2 \setminus U_1 \neq \emptyset$ , es gibt also  $u_1 \in U_1 \setminus U_2$  und  $u_2 \in U_2 \setminus U_1$ .

Wegen  $u_1 \in U_1 \subseteq U_1 \cup U_2$  und  $u_2 \in U_2 \subseteq U_1 \cup U_2$  sind damit  $u_1, u_2$  Elemente des Untervektorraums  $U_1 \cup U_2$ , und damit nach Definition von „Untervektorraum“ auch  $u_1 + u_2 \in U_1 \cup U_2$ . Damit liegt aber  $u_1 + u_2$  in einer der beiden Mengen, die vereinigt werden, d.h.  $u_1 + u_2 \in U_1$  oder  $u_1 + u_2 \in U_2$ .

**Falls**  $u_1 + u_2 \in U_1$  folgt, da  $u_1 \in U_1$  und  $U_1$  Untervektorraum ist, daß auch  $u_2 = (u_1 + u_2) - u_1 \in U_1$ , und das ist ein Widerspruch:  $u_2 \in U_2 \setminus U_1 \implies u_2 \notin U_1$ .

**Falls**  $u_1 + u_2 \in U_2$  folgt, da  $u_2 \in U_2$  und  $U_2$  Untervektorraum ist, daß auch  $u_1 = (u_1 + u_2) - u_2 \in U_2$ , und das ist erneut ein Widerspruch:  $u_1 \in U_1 \setminus U_2 \implies u_1 \notin U_2$ .

Also war die Annahme falsch und es gilt  $U_1 \subseteq U_2$  oder  $U_2 \subseteq U_1$  q.e.d.