

**Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker**

**Blatt 11**

**Zu Aufgabe 41:**

Im  $\mathbb{R}^4$  seien gegeben  $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Dann:

- (a)  $a, b, c$  sind linear abhängig.
- (b) Man gebe eine Basis von  $U = \text{span}(a, b, c)$  an.
- (c) Man ergänze diese Basis durch Hinzunahme von Einheitsvektoren zu einer Basis des  $\mathbb{R}^4$ .

**Beweis:**

Sei  $A = (a \ b \ c)$  die Matrix, deren Spalten die gegebenen Vektoren  $a, b, c$  sind. Wir führen gleich die im Hinweis vorgeschlagene Transformation von  $B = (A, E_4) = (a \ b \ c \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$  durch:

$$\begin{aligned}
 B = (A|E_4) &= \left( \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{II}-3\cdot\text{III}]{\text{IV}+\text{III}} \left( \begin{array}{ccc|cccc} 0 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & -10 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\substack{\text{IV}-\text{I} \\ \text{I} \leftrightarrow \text{III} \\ (-\frac{1}{5})\cdot\text{II}}]{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left( \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-2\cdot\text{II}} \left( \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\text{IV}+\text{III}} \left( \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \end{array} \right) \quad (\star)
 \end{aligned}$$

Dies ist die Zeilenstufenform der Matrix  $B = (A, E_4)$ . Sie wurde erzeugt durch elementare Zeilenumformungen, d.h. durch Multiplikation von links mit einer invertierbaren Matrix  $G \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$  :  
 $G \cdot B = G \cdot (A, E_4) = (G \cdot A, G \cdot E_4) = (G \cdot A, G)$ .

Nun gilt für jede Auswahl  $C = (b_{j_1} \ b_{j_2} \ \dots \ b_{j_r}) \in \mathbb{R}^{4 \times r}$  ( $1 \leq r \leq 7$  und  $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 7$ ) von Spalten von  $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_7)$ , daß mit  $G \cdot B = G \cdot (b_1 \ \dots \ b_7) = (G \cdot b_1 \ \dots \ G \cdot b_7)$  auch gilt:  
 $G \cdot (b_{j_1} \ \dots \ b_{j_r}) = (G \cdot b_{j_1} \ \dots \ G \cdot b_{j_r})$  ist in Zeilenstufenform.

Insbesondere ist  $G \cdot A = G \cdot (b_1 \ b_2 \ b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Nach Vorlesung Folgerung (3.25)(d) gilt  $\text{rang}(G \cdot C) = \text{rang}(C)$  für jede invertierbare Matrix  $G$  und beliebige Matrix  $C$  geeigneten Formats.

Also:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(G \cdot A) = \text{rang} \left( \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2 \quad (\text{Anzahl der Stufen in der Zeilenstufenform } G \cdot A$$

der Matrix  $A$ ).

Nach Definition ist aber  $2 = \text{rang}(A) = \dim(\text{span}\{a, b, c\})$ . Die Dimension eines Vektorraums gibt die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren in diesem Vektorraum an; damit sind je drei Vektoren in  $\text{span}\{a, b, c\}$  linear abhängig, insbesondere sind also die Vektoren  $a, b, c$  selbst linear abhängig. Damit ist Teil (a) gezeigt.

Aber auch Teil (b) ist implizit schon gelöst: Es ist

$$G \cdot (a \ b) = G \cdot (b_1 \ b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{(3.25)(d)} \text{rang}(a \ b) = \text{rang}(G \cdot (a \ b)) = \text{rang} \left( \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = 2.$$

Das Erzeugendensystem  $\{a, b\}$  des Spaltenraums von  $(a \ b)$  hat also  $2 = \dim(\text{span}\{a, b\})$  Elemente

Vorlesung  
 $\xRightarrow{(3.14)} a, b$  sind linear unabhängig.

Es ist  $\dim(\text{span}\{a, b, c\}) = 2 = \dim(\text{span}\{a, b\})$ , d.h.  $a, b$  sind sogar Basis von  $\text{span}\{a, b, c\}$ :

Jede Basis von  $\text{span}\{a, b, c\}$  besteht aus genau zwei linear unabhängigen Vektoren, und je zwei linear unabhängige Vektoren aus  $\text{span}\{a, b, c\}$  bilden eine Basis dieses Vektorraums. Also ist  $\{a, b\}$  eine Basis von  $U = \text{span}\{a, b, c\}$  q.e.d.

Aber auch für Teil (c) ist mit der Erzeugung der Zeilenstufenform in (★) die entscheidende Vorarbeit bereits getan:

Es ist  $4 = \dim(\mathbb{R}^4)$ . Jede Basis von  $\mathbb{R}^4$  umfaßt also 4 Elemente. Es genügt damit, 4 linear unabhängige Vektoren im  $\mathbb{R}^4$  zu finden - diese sind dann bereits eine Basis von  $\mathbb{R}^4$  (Folgerung (3.14) Vorlesung). Wir suchen also (da  $a, b$  linear unabhängig sind) zwei Vektoren  $e_i, e_j$  unter den  $e_1, e_2, e_3, e_4$ , so daß  $a, b, e_i, e_j$  linear unabhängig sind, was äquivalent zur Aussage

$$\dim(\text{span}\{a, b, e_i, e_j\}) = 4 \iff \text{rang}(a \ b \ e_i \ e_j) = 4$$

ist. Dies ist jedoch an der Zeilenstufenform der Matrix  $C = (a \ b \ e_i \ e_j)$  ablesbar: diese muß gerade 4 Stufen enthalten. Wir brauchen also in (★) zwei geeignete Vektoren  $e_i, e_j$  mit  $i < j$ , so daß die Zeilenstufenform  $G(a \ b \ e_i \ e_j)$  genau 4 Stufen besitzt.

Wenn wir (★) untersuchen, sehen wir, daß zum Beispiel für  $i = 1, j = 2$  diese Forderung erfüllt ist:

$$G \cdot (a \ b \ e_1 \ e_2) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{array} \right) \text{ hat 4 Stufen} \implies \text{rang}(a \ b \ e_1 \ e_2) = 4 \xRightarrow{\text{s.o.}} a, b, e_1, e_2 \text{ sind}$$

linear unabhängig, also eine Basis von  $\mathbb{R}^4$  q.e.d.

Aber auch die Wahl  $i = 1, j = 3$  ist sinnvoll:

$$G \cdot (a \ b \ e_1 \ e_3) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} \end{array} \right) \text{ hat 4 Stufen} \implies \text{rang}(a \ b \ e_1 \ e_3) = 4 \xRightarrow{\text{s.o.}} a, b, e_1, e_3 \text{ sind}$$

linear unabhängig, also eine Basis von  $\mathbb{R}^4$  q.e.d.

Ebenso kann man wählen:  $i = 1, j = 4$  :

$$G \cdot (a \ b \ e_1 \ e_4) = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ hat 4 Stufen} \implies \text{rang}(a \ b \ e_1 \ e_4) = 4 \xRightarrow{\text{s.o.}} a, b, e_1, e_4 \text{ sind}$$

linear unabhängig, also eine Basis von  $\mathbb{R}^4$  q.e.d.

### Zu Aufgabe 42:

$U = \text{span}\{(2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, -3), (1, 1, 2, -7)\}$  ist Untervektorraum von  $\mathbb{R}^4$ .

- (a) Liegt  $(3, -1, 0, -1)$  in  $U$ ?
- (b) Man begründe ohne Rechnung, daß es ein  $b \in \mathbb{R}^4$  gibt mit  $b \notin U$ .
- (c) Bestimmen Sie ein  $b \in \mathbb{R}^4$  mit  $b \notin U$ .

### Lösung:)

Sei  $a_1 = (2, -1, 3, 2)$ ,  $a_2 = (-1, 1, 1, -3)$ ,  $a_3 = (1, 1, 2, -7)$ .

$$U = \text{span}\{(2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, -3), (1, 1, 2, -7)\} \stackrel{\substack{\text{span ist Menge} \\ \text{aller Linear-} \\ \text{kombinationen}}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot a_i \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei  $c := (3, -1, 0, -1)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} c \in U &\iff \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} : c = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot a_i \\ &\iff c^T = \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot a_i \right)^T = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \cdot a_i^T \quad \stackrel{\substack{\text{Matrixschreib-} \\ \text{weise}}}{=} (a_1^T \ a_2^T \ a_3^T) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \\ &\iff \exists x \in \mathbb{R}^3 : c^T = \underbrace{(a_1^T \ a_2^T \ a_3^T)}_{=: A} \cdot x \end{aligned}$$

$\iff$  das lineare Gleichungssystem  $A \cdot x = c^T$  ist lösbar

$$\stackrel{\substack{\text{Vorlesung} \\ \text{Satz (3.29) (a)}}}{\iff} \text{rang}(A, c^T) = \text{rang}(A) \quad (\star)$$

Um dies zu überprüfen, erstellen wir die Zeilenstufenform von  $(A, c^T)$ .

Obige Äquivalenzen in  $(\star)$  zeigen aber auch für jedes  $b = (b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4) \in \mathbb{R}^4$  :

$$b \notin U \iff \text{rang}(A, b^T) \neq \text{rang}(A).$$

Wir können also im Hinblick auf Aufgabenteil (c) gleich die Zeilenstufenform von  $(A, b^T)$  bestimmen.

Andererseits liefert Teil (b): wenn es ein  $b \in \mathbb{R}^4$  gibt mit  $b \notin U$ , so kann  $U$  nicht gleich  $\mathbb{R}^4$  sein, d.h. mindestens einer der kanonischen Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3, e_4$  liegt nicht in  $U$ . (Wären alle  $e_j$  in  $U$ , so  $\mathbb{R}^4 = \text{span}\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^4 \implies U = \mathbb{R}^4$ , Widerspruch !). Also muß für mindestens einen der Einheitsvektoren  $e_j$  gelten:  $\text{rang}(A, e_j^T) \neq \text{rang}(A)$ .

Untersuchen wir also die Zeilenstufenform von  $(A, c^T \ b^T \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$ , um alle obigen Lösungsmöglichkeiten zugleich zu behandeln (wohlgemerkt: es reicht, nur  $(A, c^T \ b^T)$  oder nur  $(A, c^T \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$  zu betrachten):

$$\begin{aligned}
 (A, c^T \ b^T \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) &= \left( \begin{array}{ccc|c|c|cccc} 2 & -1 & 1 & 3 & b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & b_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & -1 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\substack{III+3 \cdot II \\ I+2 \cdot II}]{IV-I} \left( \begin{array}{ccc|c|c|cccc} 0 & 1 & 3 & 1 & b_1+2b_2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & b_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -3 & b_3+3b_2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -4 & b_4-b_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\substack{(-1) \cdot I}]{I \leftrightarrow II} \left( \begin{array}{ccc|c|c|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -b_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & b_1+2b_2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -3 & b_3+3b_2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & -4 & b_4-b_1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\substack{III-4 \cdot II}]{IV+2 \cdot II} \left( \begin{array}{ccc|c|c|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -b_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & b_1+2b_2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & b_3-4b_1-5b_2 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_4+4b_2+b_1 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{IV-\frac{2}{7} \cdot III} \left( \begin{array}{ccc|c|c|cccc} 1 & -1 & -1 & 1 & -b_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & b_1+2b_2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & b_3-4b_1-5b_2 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4-\frac{2}{7}b_3+\frac{38}{7}b_2+\frac{15}{7}b_1 & \frac{15}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array} \right) \quad (\bullet)
 \end{aligned}$$

( $\bullet$ ) stellt die Zeilenstufenform von  $(A, c^T \ b^T \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$  dar. Es gibt also eine invertierbare Matrix  $G \in \text{GL}(4, \mathbb{R})$  mit

$$G \cdot (A, c^T \ b^T \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} -b_2 \\ b_1 + 2b_2 \\ b_3 - 4b_1 - 5b_2 \\ b_4 - \frac{2}{7}b_3 + \frac{38}{7}b_2 + \frac{15}{7}b_1 \end{array} \middle| \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & -5 & 1 & 0 \\ \frac{15}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array} \right).$$

Nun bearbeiten wir die Aufgabenteile (a), (b) und (c) .

### Ad (a):

Gemäß (♣) ist  $\text{rang}(A, c^T)$  zu untersuchen:

$$G \cdot (A, c^T) \stackrel{(\bullet)}{=} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ ist die Zeilenstufenform von } (A, c^T) .$$

Man erkennt an der Anzahl der Stufen:

$$\text{rang}(A) = 3 = \text{rang}(A, c^T)$$

(Anzahl Stufen vor der senkrechten Trennlinie bzw.in der gesamten Matrix).

Also gilt nach (♣) :  $c \in U$

### Ad (b):

Es gilt nach Vorlesung:

$$\dim(\mathbb{R}^4) = 4 > 3 \stackrel{\substack{\text{siehe} \\ (a)}}{=} \text{rang}(A) = \dim(\text{Spaltenraum}(A)) \stackrel{\text{Def.}}{=} \dim(\text{span}\{a_1, a_2, a_3\});$$

wäre  $U = \mathbb{R}^4$ , so müßte aber  $\dim(U) = 4$  gelten. Also ist zwar  $U \subseteq \mathbb{R}^4$ , aber  $U \neq \mathbb{R}^4 \implies U \subsetneq \mathbb{R}^4 \implies \exists b \in \mathbb{R}^4 \setminus U$  q.e.d.

### Ad (c):

#### **1. Möglichkeit:**

Wir suchen ein  $b \in \mathbb{R}^4$  mit  $b \notin U \iff \text{rang}(A, b^T) \neq \text{rang}(A) = 3$   
(♣)

Gemäß (•) gilt für die Zeilenstufenform von  $(A, b^T)$ :

$$G \cdot (A, b^T) = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -b_2 \\ 0 & 1 & 3 & b_1 + 2b_2 \\ 0 & 0 & -7 & b_3 - 4b_1 - 5b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - \frac{2}{7}b_3 + \frac{38}{7}b_2 + \frac{15}{7}b_1 \end{array} \right)$$

Wir sehen, daß die Matrix  $G \cdot (A, b^T)$  genau dann mehr als 3 Stufen hat, also  $(A, b^T)$  genau dann einen Rang  $> 3$  hat, wenn

$$b_4 - \frac{2}{7}b_3 + \frac{38}{7}b_2 + \frac{15}{7}b_1 \neq 0 \iff b_4 \neq \frac{2}{7}b_3 - \frac{38}{7}b_2 - \frac{15}{7}b_1$$

Wir setzen zum Beispiel  $b_1 = b_2 = b_3 = 7 \implies b_4 \neq \frac{2}{7} \cdot 7 - \frac{38}{7} \cdot 7 - \frac{15}{7} \cdot 7 = -51$  ist geeignet. Man wähle also beispielsweise  $b = (7, 7, 7, 7) \implies b \notin U$ .

Oder:  $b_1 = b_2 = b_3 = 0 \implies b_4 \neq 0$ ; also ist  $b = (0, 0, 0, 1)$  geeignet:  $b \notin U$ .

## 2. Möglichkeit:

Wie wir in (a) gesehen haben, können nicht alle Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3, e_4$  in  $U$  liegen. Wir suchen also ein  $e_j$ , so daß  $e_j \notin U \iff \text{rang}(A, e_j^T) \neq \text{rang}(A)$ . Mit (•) gilt:

$$G \cdot (A, e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -4 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{15}{7} & \frac{38}{7} & -\frac{2}{7} & 1 \end{array} \right) \quad (\text{Zeilenstufenform}).$$

Man sieht, daß bei jeder Wahl von  $e_j$  in der letzten Spalte von  $G \cdot (A, e_j^T)$  eine Stufe entsteht, d.h. für jedes  $1 \leq j \leq 4$  ist  $\text{rang}(A, e_j^T) = 4 \neq 3 = \text{rang}(A) \xRightarrow{(\star)} e_j \notin U$  q.e.d.

## Zu Aufgabe 43:

Sei  $K$  ein Körper und  $m, n \in \mathbb{N}$ ; dann gilt:

(a) Für alle Matrizen  $A, B \in K^{n \times n}$  gilt:

$$A \cdot B \text{ invertierbar} \implies A \text{ und } B \text{ sind invertierbar.}$$

(b) Für alle Matrizen  $A, B \in K^{m \times n}$  gilt:  $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$

## Beweis:

Zunächst überlegen wir uns eine andere Formulierung der Fredholmsche Alternative für quadratische Matrizen  $A \in K^{n \times n}$  mit Hilfe des Rangbegriffs. Es gilt nämlich:

$$A \text{ invertierbar} \xLeftrightarrow[\text{(2.20)}]{\text{Corollar}} \text{ Die Gleichung } A \cdot x = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } x = 0 \iff \text{rang}(A) = n \quad (\star)$$

[ Denn:

Nach der Bemerkung Vorlesung / nach (3.2) ist für  $A \in K^{m \times n}$  die Menge  $\{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\}$  ein Untervektorraum von  $K^n$ .

Weiter ist nach Lemma (3.28)/Vorlesung  $\dim(\{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\}) = n - r \quad (\star)$ , wobei  $r = \text{rang}(A)$ .

Also:

$$\text{Die Gleichung } A \cdot x = 0 \text{ besitzt nur die triviale Lösung } x = 0 \iff \{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\} = \{0\} \iff \dim(\{x \in K^n \mid A \cdot x = 0\}) = 0 \xLeftrightarrow[\text{(\star)}]{\text{s.o.}} n - \text{rang}(A) \iff \text{rang}(A) = n \quad \text{q.e.d.} ]$$

## Ad (a):

$$AB \text{ ist invertierbar} \xRightarrow[\text{Def.}]{\text{Lemma (3.25)(c)}} \text{ es gibt Matrix } C \in K^{n \times n} \text{ mit } E_n = (AB) \cdot C = A(BC)$$

$$n = \text{rang}(E_n) = \text{rang}(A(BC)) \leq \min\{\text{rang}(A), \text{rang}(BC)\} \leq \text{rang}(A) \xRightarrow[\text{(3.25)(b)}]{\text{Lemma}} \min\{m, n\} \leq n$$

$\implies \text{rang}(A) = n \xRightarrow{(\star)} A$  ist invertierbar.

Damit existiert  $A^{-1} \in K^{n \times n}$  und ist nach VL (2.13) ebenfalls invertierbar  $\xRightarrow[AB \text{ invertierbar}]{\text{VL (2.13)}} A^{-1} \cdot (AB)$  ist invertierbar (da  $GL(n, K)$  eine Gruppe ist), also ist  $B = E_n B = (A^{-1} A) B = A^{-1} \cdot (AB)$  invertierbar.  
Insgesamt:  $A$  und  $B$  sind invertierbar q.e.d.

### Ad (b):

Wie in der Vorlesung (3.22) gezeigt, gilt für jede Matrix  $C \in K^{m \times n}$  :

$$\text{rang}(C) = \dim(\text{Spaltenraum}(C)) = \dim(\{C \cdot x \mid x \in K^n\}) \quad (\bullet)$$

Ferner:

$$\{(A+B) \cdot x \mid x \in K^n\} = \{A \cdot x + B \cdot x \mid x \in K^n\} \subseteq \{A \cdot x \mid x \in K^n\} + \{B \cdot y \mid y \in K^n\}$$

(denn:  $z = (A+B) \cdot x = A \cdot x + B \cdot x \implies z \in \{A \cdot x \mid x \in K^n\} + \{B \cdot y \mid y \in K^n\}$  (für  $y = x$ )).

Also folgt mit  $(\bullet)$  und weil die Dimension jedes Untervektorraums eines Vektorraums immer kleiner oder gleich der Dimension des Vektorraums selbst ist:

$$\begin{aligned} \text{rang}(A+B) &= \dim(\{(A+B) \cdot x \mid x \in K^n\}) \\ &\leq \dim(\underbrace{\{A \cdot x \mid x \in K^n\}}_{=: U} + \underbrace{\{B \cdot y \mid y \in K^n\}}_{=: W}) \stackrel{\text{Dimensionsformel (3.20)}}{=} \dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) \\ &= \dim(\{A \cdot x \mid x \in K^n\}) + \dim(\{B \cdot y \mid y \in K^n\}) - \underbrace{\dim(\{A \cdot x \mid x \in K^n\} \cap \{B \cdot y \mid y \in K^n\})}_{\geq 0} \\ &\leq \dim(\{A \cdot x \mid x \in K^n\}) + \dim(\{B \cdot y \mid y \in K^n\}) \\ &\stackrel{(\bullet)}{=} \text{rang}(A) + \text{rang}(B) \end{aligned}$$

### Zu Aufgabe 44:

Sei  $K$  ein Körper,  $A \in K^{m \times n}$  und  $\text{rang}(A) = r \in \mathbb{N}$ .

- (a) Es gibt Matrizen  $C \in K^{m \times r}$  und  $D \in K^{r \times n}$  mit  $\text{rang}(C) = \text{rang}(D) = r$ , so daß  $A = CD$ .
- (b) Begründen Sie, warum man die Zerlegung in (a) als Vollrangzerlegung bezeichnet.

### Ad (a):

#### Falls $r = 0$ :

Dann  $\dim(\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}) = 0$  (mit  $A = (a_1 \dots a_n) \in K^{m \times n}$ )  $\implies \text{span}\{a_1, \dots, a_n\} = \{0\} \implies \forall 1 \leq j \leq n : a_j = 0 \implies A = 0$ .

Dann ist  $C \in K^{m \times 0}$  als leere Matrix zu verstehen, ebenso  $D \in K^{0 \times n}$  und weiter  $C \cdot D \in K^{m \times 0} \cdot K^{0 \times n}$  als symbolisches Produkt mit Wert  $0 \in K^{m \times n}$ .

Das ist nur formal sinnvoll; hier ist nichts zu beweisen, sondern nur  $C, D$  und  $C \cdot D$  sinnvoll zu definieren:

Für  $C \in K^{m \times 0}$  und  $D \in K^{0 \times n}$  (leere Matrizen) sei  $C \cdot D = 0 \in K^{m \times n}$ .

**Falls  $r > 0$  :**

Gemäß dem Satz über die Äquivalenznormalform Vorlesung (2.17) gibt es zu  $A \in K^{m \times n}$  invertierbare Matrizen  $G \in GL(m, K)$  und  $H \in GL(n, K)$  und ein  $\rho \in \{0, \dots, \min\{m, n\}\}$ , so daß

$$A = G \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\in K^{m \times n}} \cdot H \quad \text{mit } E_\rho \text{ die } \rho \times \rho - \text{Einheitsmatrix (} E_\rho \text{ leer für } \rho = 0 \text{)}.$$

Nun liefert Folgerung (3.25)(d)/Vorlesung :

$$r = \text{rang}(A) = \text{rang}\left(G \cdot \begin{pmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H\right) \stackrel{G, H \text{ invertierbar}}{=} \text{rang}\left(\begin{pmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \dim(\underbrace{\text{span}\{e_1, \dots, e_\rho\}}_{\subseteq K^m}) = \rho$$

(denn  $e_1, \dots, e_\rho$  sind die ersten  $\rho$  Einheitsvektoren in  $\mathbb{K}^m$  mit  $0 \leq \rho \leq \min\{m, n\} \leq n$ ).

Die Matrix  $\begin{pmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  nun kann man weiter zerlegen; dazu bezeichnen wir mit  $0^{p \times q}$  die Nullmatrix in  $K^{p \times q}$ ; es gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_r \\ 0^{(m-r) \times r} \end{pmatrix}}_{\in K^{m \times r}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & 0^{r \times (n-r)} \end{pmatrix}}_{\in K^{r \times n}} \stackrel{\text{Blockmatrix-}}{\text{produkt}} \begin{pmatrix} E_r \cdot E_r & E_r \cdot 0^{r \times (n-r)} \\ 0^{(m-r) \times r} \cdot E_r & 0^{(m-r) \times r} \cdot 0^{r \times (n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0^{r \times (n-r)} \\ 0^{(m-r) \times r} & 0^{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times n} \quad (\text{siehe Bemerkungen zum Blockmatrixprodukt, Lösungsvorschläge zu Blatt 8}).$$

Das ist sinnvoll, weil  $r \leq n$  und  $r \leq m$ , d.h.  $n - r \geq 0$  und  $m - r \geq 0$ .

Im Falle  $n - r = 0$  bzw.  $m - r = 0$  sind die jeweiligen Matrizen als leer zu interpretieren:  $0^{p \times 0}$  ist einfach eine Leerstelle.

Damit können wir schreiben:

$$A = G \cdot \begin{pmatrix} E_\rho & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot H \stackrel{\text{s.o.}}{=} G \cdot \left( \begin{pmatrix} E_r \\ 0^{(m-r) \times r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0^{r \times (n-r)} \end{pmatrix} \right) \cdot H = G \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in K^{m \times r}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}}_{\in K^{r \times n}} \cdot H =$$

$$= \left( G \cdot \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \left( \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} \cdot H \right)$$

Setzen wir nun

$$C := G \cdot \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{m \times r} \quad \text{und} \\ D := \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} \cdot H \in K^{r \times n},$$

so gilt natürlich  $A = C \cdot D$ , und für die Ränge folgt wie gewünscht:

$$\begin{aligned} \text{rang}(C) &= \text{rang}\left(G \cdot \begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\right) \stackrel{(3.25)(d)}{=} \underset{G \text{ invertierbar}}{\text{rang}}\left(\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\right) = r \quad \text{und} \\ \text{rang}(D) &= \text{rang}\left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} \cdot H\right) \stackrel{(3.25)(d)}{=} \underset{H \text{ invertierbar}}{\text{rang}}\left(\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix}\right) = r \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$



**Ad (b):**

Eine Matrix  $C \in K^{p \times q}$  hat vollen Rang, wenn  $\text{rang}(C) = p$  oder  $\text{rang}(C) = q$  gilt.

Die Bezeichnung ist sinnvoll, weil  $r$  gleich dem Rang von  $A$  ist, und durch  $A = CD$  die Matrix  $A$  in ein Produkt zweier Matrizen zerlegt wird, die jeweils „vollen Rang“  $r$  haben: sie besitzen den Rang  $r$ , und das ist der maximale Rang, den sie haben können, da ja  $C$  gerade  $r$  Spalten und  $D$  gerade  $r$  Zeilen hat; mit Vorlesung (3.25)(b) ist  $r$  der größtmögliche Rang dieser beiden Matrizen.

Dabei ist weder möglich, daß  $C$  weniger als  $r$  Spalten, noch, daß  $D$  weniger als  $r$  Zeilen hat: denn sonst wäre

$$r = \text{rang}(A) = \text{rang}(CD) \underset{(3.25)(c)}{\leq} \min\{\text{rang}(C), \text{rang}(D)\} \underset{(3.25)(b)}{\leq} \min\{\text{Spaltenzahl}(C), \text{Zeilenzahl}(D)\} < r$$

nach Annahme (Widerspruch !).

Es wird also  $A$  in ein Produkt zweier Matrizen mit maximalem, d.h. „vollem“ Rang  $r = \text{rang}(A)$  zerlegt, wobei  $r = \text{rang}(A)$ .