

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 25 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Eine Matrix $R \in K^{n \times n}$ heißt rechte oder obere Dreiecksmatrix, wenn $r_{ij} = 0$ für $1 \leq j < i \leq n$. Entsprechend ist $L \in K^{n \times n}$ eine linke oder untere Dreiecksmatrix, wenn $l_{ij} = 0$ für $1 \leq i < j \leq n$. Zeigen Sie:

- (a) $R, \tilde{R} \in K^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix $\Rightarrow R \cdot \tilde{R}$ obere Dreiecksmatrix
- (b) $L \in K^{n \times n}$ untere Dreiecksmatrix $\Rightarrow L^\top$ obere Dreiecksmatrix
- (c) $L, \tilde{L} \in K^{n \times n}$ untere Dreiecksmatrix $\Rightarrow L \cdot \tilde{L}$ untere Dreiecksmatrix
Diese Aussage soll auf (a) und (b) zurückgeführt werden.

Aufgabe 26 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 27 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, Für $A \in K^{n \times n}$ sei $\text{spur}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ die Spur der Matrix A . Zeigen Sie:

- (a) $A, B \in K^{n \times n} \Rightarrow \text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$
- (b) $A, B, C \in K^{n \times n} \Rightarrow \text{spur}(ABC) = \text{spur}(BCA) = \text{spur}(CAB)$
- (c) Für $n \geq 2$ gibt es $A, B, C \in K^{n \times n}$ mit $\text{spur}(ABC) \neq \text{spur}(BAC)$

Bitte wenden!

Aufgabe 28 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, $a, b \in K^n$ mit $1 + b^\top A^{-1}a \neq 0$.
Zeigen Sie: $A + ab^\top$ ist invertierbar und es gilt:

$$(A + ab^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^\top A^{-1}}{1 + b^\top A^{-1}a}$$

(Bem.: Für $\lambda \in K$ mit $\lambda \neq 0$ und $B \in K^{m \times n}$: $\frac{B}{\lambda} := \frac{1}{\lambda}B$)

Abgabe einzeln oder zu zweit: Dienstag, 9.12.2008 bis 12⁰⁰ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock