

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Die folgenden 8 Aufgaben sind gedacht zur Unterstützung der Klausurvorbereitung. Sie sollen eine grobe Abschätzung des Arbeitsumfangs (nach oben) und des Schwierigkeitsgrads ermöglichen. Es muss allerdings damit gerechnet werden, dass auch Aufgaben zu anderen Themen als hier gestellt werden. Alle Aufgaben zählen 6 Punkte. Zum Bestehen genügt ein Drittel der Maximalpunktzahl von 48 Punkten, die Bestnote wird mit 75% der Maximalpunktzahl oder besser erreicht.

Für Bachelorstudierende der Informatik, Medien- und Bioinformatik besteht die Klausur nur aus den ersten 6 Aufgaben. Die Maximalpunktzahl beträgt dann 36 Punkte, zum Bestehen genügen 12 Punkte, die Bestnote gibt es ab 27 Punkte oder mehr. Es besteht für diesen Personenkreis auch die Möglichkeit, die volle Klausur zu bearbeiten. Ergibt sich mit den Kriterien des vorigen Abschnitts ein besseres Ergebnis, so zählt dieses.

1. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{4n+2} = 2 \cdot (-4)^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

2. Zeigen Sie, dass $\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det A > 0\}$ eine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation bildet.

3. Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & (t^2 - 14)x_3 & = & t + 2 \end{array}$$

keine, eine, oder unendlich viele Lösungen?

4. Untersuchen Sie, ob $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und berechnen Sie ggf. die inverse Matrix.

5. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ aus \mathbb{R}^4 linear unabhängig sind

und ergänzen Sie sie durch Hinzunahme geeigneter Vektoren aus der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3, e_4 zu einer Basis von \mathbb{R}^4 .

Bitte wenden!

6. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$

(a) mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz,

(b) durch elementare Zeilenumformungen.

7. Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(a) Zeigen Sie: $\chi_A(\lambda) = -\lambda(3 - \lambda)^2 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$.

(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 3.

(c) Ist A diagonalisierbar?

8. Bestimmen Sie alle komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

KEINE ABGABE! Ein Lösungsvorschlag soll im Internet veröffentlicht werden.