

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 15

Zu Aufgabe 1:

Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{4n+2} = 2 \cdot (-4)^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Lösung:

Induktionsanfang $n = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{4 \cdot 0 + 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-4)^0 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{4n+2} = 2 \cdot (-4)^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{4(n+1)+2} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{4n+6} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4n+2)+4} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{4n+2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4 \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} 2 \cdot (-4)^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \right)^2 \stackrel{\text{Induktions-}}{=} 2 \cdot (-4)^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 \\ &= 2 \cdot (-4)^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 8 \cdot (-4)^n \cdot (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-4) \cdot (-4)^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-4)^{n+1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 2:

Zeigen Sie, daß $\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0 \}$ eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation bildet.

Lösung:

Sei $G := \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) > 0 \}$.

Nachweis der Gruppenaxiome:

(a) Abgeschlossenheit:

Es seien $A, B \in G \implies \det(A) > 0 \wedge \det(B) > 0$. Dann folgt:

$$\det(AB) \stackrel{\text{Multiplikations-}}{=} \det(A) \cdot \det(B) > 0 \stackrel{\text{Definition}}{\implies} A \cdot B \in G$$

(b) Assoziativgesetz: Dieses ist automatisch erfüllt, da es in $(\mathbb{R}^{n \times n}, \cdot)$ gültig ist.

(c) Für die Einheitsmatrix E_n gilt:

$$\det(E_n) = 1 > 0 \stackrel{\text{Def. } G}{\implies} E_n \in G \text{ und } \forall A \in G : A \cdot E_n = E_n \cdot A = A.$$

(d) Für jedes $A \in G$ gilt $\det(A) > 0 \implies \det(A) \neq 0 \stackrel{\text{Vorl.}}{\implies} A$ invertierbar und

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} > 0 \stackrel{\text{Def. } G}{\implies} A^{-1} \in G.$$

Damit sind alle Gruppenaxiome für (G, \cdot) erfüllt.

Zu Aufgabe 3:

Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das reelle lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & (t^2 - 14) \cdot x_3 & = & t + 2 \end{array}$$

keine, eine oder unendliche viele Lösungen?

Lösung:

Darstellung in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & t^2 - 14 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{=:b} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ t + 2 \end{pmatrix}}_{=:b}$$

Wir führen die erweiterte Matrix $(A|b)$ in Zeilenstufenform über:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & t^2 - 14 & t + 2 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III}-4\cdot\text{I}]{\text{II}-3\cdot\text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & t^2 - 2 & t - 14 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & t^2 - 16 & t - 4 \end{array} \right)$$

Falls $t^2 \neq 16 \iff t \notin \{-4, 4\}$ ist die Zeilenstufenform $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & t^2 - 16 & t - 4 \end{array} \right)$,

die Matrix A ist invertierbar und damit gibt es genau eine Lösung, nämlich $x = 0$.

Falls $t^2 - 16 = 0 \iff t \in \{-4, 4\}$ ist die Zeilenstufenform von A gleich $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$,

und es gibt wieder zwei Fälle:

falls $t = 4$ ist die Zeilenstufenform von (A, b) gleich $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$.

Da $\text{rang}((A, b)) = 2 = \text{rang}(A)$ ist das Gleichungssystem lösbar; die Dimension des Lösungsraums ist $n - \text{rang}(A) = 3 - 2 = 1 \implies$ es gibt unendlich viele Lösungen.

falls $t = -4$ ist die Zeilenstufenform von (A, b) gleich $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array} \right)$,

und damit ist das Gleichungssystem nicht lösbar, da $\text{rang}((A, b)) = 3 \neq 2 = \text{rang}(A)$.

Zu Aufgabe 4:

Untersuchen Sie, ob $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls die inverse Matrix.

Lösung:

Wir versuchen, die Matrix $(A|E_3)$ durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt $(E_3|B)$ zu transformieren; gelingt uns das nicht, weil $\text{rang}(A) < 3$, so ist A nicht invertierbar; andernfalls ist B die inverse Matrix von A .

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow[7 \cdot III + 3 \cdot I]{7 \cdot II + 5 \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{3 \cdot III + II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 14 & 7 & 21 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow[I + 3 \cdot III_{\text{neu}}]{-\frac{1}{7} \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & -2 & 0 & -5 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow[I + 2 \cdot II_{\text{neu}}]{-\frac{1}{3} \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 0 & 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{\frac{1}{7} \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Gemäß obiger Bemerkung ist also A invertierbar und es ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Probe:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zu Aufgabe 5:

Zeigen Sie, daß die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ aus \mathbb{R}^4 linear unabhängig sind und ergänzen Sie sie durch Hinzunahme geeigneter Vektoren aus der kanonischen Basis e_1, e_2, e_3, e_4 zu einer Basis von \mathbb{R}^4 .

Lösung:

Da höchstens drei linear unabhängige Vektoren vorliegen, muß mit mindestens einem Vektor ergänzt werden. Da wir nicht wissen, welcher dies ist, ergänzen wir $(v_1 v_2 v_3)$ zu $(v_1 v_2 v_3 | E_4)$ und bringen diese Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned}
 (v_1 v_2 v_3 | E_4) &= \left(\begin{array}{ccc|cccc} 5 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & -3 & -9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{II-2\cdot IV \\ I-5\cdot IV}]{III-2\cdot IV} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 2 & -26 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 33 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{\text{vertauschen}} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -26 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -3 & 33 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{III+3\cdot IV}]{II-2\cdot IV} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[\substack{IV \leftrightarrow II_{\text{neu}}}]{II+III} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Die Matrix $(v_1 v_2 v_3)$ hat also Rang 3, besitzt damit 3 linear unabhängige Spalten $v_1, v_2, v_3 \implies v_1, v_2, v_3$ sind linear unabhängig.

An der obigen Zeilenstufenform für $(v_1 v_2 v_3 | E_4)$ erkennt man, daß durch Hinzunahme des kanonischen Einheitsvektors e_1 oder e_2 oder e_3 als vierter Spalte in der Zeilenstufenform von $(v_1 v_2 v_3 | e_i)$ eine vierte Stufe entsteht, d.h. $(v_1 v_2 v_3 | e_i)$ hat Rang 4 $\implies v_1, v_2, v_3, e_i$ sind linear unabhängig, bilden also eine Basis von \mathbb{R}^4 .

Hingegen bleibt bei Hinzunahme von e_4 der Rang der Matrix $(v_1 v_2 v_3 | e_4)$ gleich 3, d.h. v_1, v_2, v_3, e_4 sind linear abhängig, damit keine Basis von \mathbb{R}^4 .

Zu Aufgabe 6:

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

- (a) mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz
- (b) durch elementare Zeilenumformungen.

Ad (a):

Wir suchen eine Zeile mit möglichst vielen Nullen, z. B. die erste Zeile, und entwickeln nach ihr:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{entwickeln nach} \\ \text{2. Zeile}}} + (-1)^{1+4} \cdot 1 \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{entwickeln nach} \\ \text{2. Zeile}}} = \\ &= - \left((-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) - \left((-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= (1 - 1) - (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Ad (b):

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{III-II}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: \det(B).$$

Die Matrix B hat eine Nullzeile, und da die Determinante eine alternierende Multilinearform ist, folgt $\det(B) = 0$.

Zu Aufgabe 7:

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

- (a) Zeigen Sie: $\chi_A(\lambda) = -\lambda(3 - \lambda)^2$ ($\lambda \in \mathbb{R}$).
(b) Bestimmen Sie den Eigenraum zum Eigenwert 3.
(c) Ist A diagonalisierbar?

Ad (a):

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &\stackrel{\text{Def.}}{=} \det(A - \lambda \cdot E_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \stackrel{III-II}{=} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{2. \text{Spalte} + \\ 3. \text{Spalte}}}{=} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\substack{\text{entwickeln nach} \\ 3. \text{Zeile}}}{=} (-1)^{3+3} \cdot (3-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda) \cdot ((2-\lambda)(1-\lambda) - 2) \\ &= (3-\lambda) \cdot ((2-2\lambda-\lambda+\lambda^2) - 2) = (3-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 3\lambda) \\ &= -\lambda(3-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Ad (b):

Es ist das lineare Gleichungssystem $(A - 3E_3) \cdot x = 0$ zu lösen:

$$A - 3E_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{II-I \\ (-1) \cdot I}]{\substack{III-I \\ II-I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Zeilenstufenform})$$

$$\Rightarrow \text{rang}(A - 3E_3) = 1 \Rightarrow \dim(\text{Eig}_A(3)) = 3 - 1 = 2 \quad (\star)$$

Wir wählen $x_2 = \mu$ und $x_3 = \nu$ als freie Parameter und lösen die erste Gleichung nach x_1 auf:

$$x_1 + \mu + \nu = 0 \Rightarrow x_1 = -\mu - \nu \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu - \nu \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\nu \\ 0 \\ \nu \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu, \nu \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \text{Eig}_A(3) = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ad (c):

Entweder: A ist symmetrische Matrix, also diagonalisierbar.

Oder: Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren (wegen (a)).

Die algebraische Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = 0$ ist 1 (siehe (a)) und immer größergleich der geometrischen Vielfachheit $\dim(\text{Eig}_A(0)) \geq 1$ (da Eigenräume immer $\neq \{0\}$) $\Rightarrow \dim(\text{Eig}_A(0)) = 1 \Rightarrow$ beide Vielfachheiten sind gleich.

Die algebraische Vielfachheit der Nullstelle 3 ist 2 (siehe (a)), und nach Teil (b) (\star) ist $\dim(\text{Eig}_A(3)) = 2 \Rightarrow$ wieder sind beide Vielfachheiten gleich, also ist A diagonalisierbar.

Zu Aufgabe 8:

Bestimmen Sie alle komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$.

Lösung:

Eigenwerte:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & i \\ i & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)^2 - i^2 = ((1 - \lambda) - i) \cdot ((1 - \lambda) + i) \implies \\ \lambda_1 = 1 - i \wedge \lambda_2 = 1 + i \text{ sind die Nullstellen von } \chi_A(\lambda).$$

Eigenvektoren:

Zu $\lambda_1 = 1 - i$:

Es ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $(A - (1 - i) \cdot E_2) \cdot x = 0$ zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 - i) & i \\ i & 1 - (1 - i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \xrightarrow[(-i) \cdot I]{II - I} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x_2 = \mu$ ist freier Parameter; die 1. Gleichung liefert: $x_1 + \mu = 0 \implies x_1 = -\mu$

$$\implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{C}).$$

Damit sind die Eigenvektoren $\mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Zu $\lambda_2 = 1 + i$:

Wir suchen die Lösungen zu $(A - (1 + i) \cdot E_2) \cdot x = 0$.

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 + i) & i \\ i & 1 - (1 + i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \xrightarrow[i \cdot I]{II + I} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x_2 = \mu$ ist freier Parameter; die 1. Gleichung liefert: $x_1 - \mu = 0 \implies x_1 = \mu$

$$\implies \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{C}).$$

Damit sind die Eigenvektoren $\mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.