

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Es seien

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_1(x) &= \frac{x}{2}, \\ f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_2(x) &= x^2, \\ f_3 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_3(x) &= -x, \\ f_4 : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}, & f_4(x) &= \frac{1}{x}, \\ g_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & g_1(x_1, x_2) &= (f_1(x_1), f_3(x_2)) \\ g_2 : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2, & g_2(x_1, x_2) &= (f_2(x_2), f_4(x_1)) \\ h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}, & h(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Funktionen $f_1 \circ f_2 \circ f_4$, $f_3 \circ f_2 \circ h$, $f_2 \circ h \circ g_1$ und $g_1 \circ g_2$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2, cx_1 + dx_2)$$

eine Umkehrabbildung besitzt und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Die Elemente der Gruppe S_3 seien folgendermaßen bezeichnet:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, & \rho_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \tau_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \tau_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (a) Stellen Sie die Verknüpfungstafel auf.
- (b) Zeigen Sie, daß die Gruppe *nicht* kommutativ ist.
- (c) Lösen Sie die Gleichungen $\rho_3 \circ \pi = \tau_1$ und $\sigma \circ \rho_3 = \tau_1$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $a, b \in G$ besitzt die Gleichung $a \circ x = b$ jeweils eine eindeutige Lösung $x \in G$.
- (b) Sei $a \in G$. Dann ist die Abbildung $G \rightarrow G, \quad x \mapsto a \circ x$ bijektiv.

Abgabe einzeln oder zu zweit: Dienstag, 11.11.2008 bis 12⁰⁰ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock