

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 41 (4 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren aus \mathbb{R}^4

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass a, b, c linear abhängig sind.
- (b) Geben Sie eine Basis von $U = \text{span}(a, b, c)$ an.
- (c) Ergänzen Sie diese Basis durch Hinzunahme von Einheitsvektoren zu einer Basis von \mathbb{R}^4 .
(Hinweis: Transformieren Sie die Matrix $(a \ b \ c \ e_1 \ e_2 \ e_3 \ e_4)$ in Zeilenstufenform.)

Aufgabe 42 (4 Punkte)

Gegeben sei der Untervektorraum von \mathbb{R}^4

$$U = \text{span}((2, -1, 3, 2), (-1, 1, 1, -3), (1, 1, 2, -7)) .$$

- (a) Liegt $(3, -1, 0, -1)$ in U ?
- (b) Begründen Sie ohne Rechnung, dass es ein $b \in \mathbb{R}^4$ mit $b \notin U$ gibt.
- (c) Bestimmen Sie ein $b \in \mathbb{R}^4$ mit $b \notin U$.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

Sei K ein Körper.

- (a) Seien $A, B \in K^{n \times n}$. Zeigen Sie:
Ist $A \cdot B$ invertierbar, so sind auch A und B invertierbar.
(Hinweis: 3.25c)
- (b) Seien $A, B \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie: $\text{rang}(A + B) \leq \text{rang } A + \text{rang } B$.
(Hinweis: Dimensionsformel für Untervektorräume)

Bitte wenden!

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$ und $\text{rang } A = r \in \mathbb{N}$.

- (a) Zeigen Sie, dass es Matrizen $C \in K^{m \times r}$ und $D \in K^{r \times n}$ mit $\text{rang } C = \text{rang } D = r$ gibt, so dass $A = C \cdot D$.
(Hinweis: Äquivalenznormalform 2.17 mit entsprechender Partitionierung der Matrizen G und H . C und D ergeben sich aus den ersten r Spalten bzw. Zeilen von G bzw. H . Wenden Sie dann 3.25c an.)
- (b) Die Aussage (a) wird als Vollrangzerlegung bezeichnet. Begründen Sie, weshalb diese Benennung sinnvoll ist.

Abgabe einzeln oder zu zweit: Dienstag, 13.1.2009 bis 12⁰⁰ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock