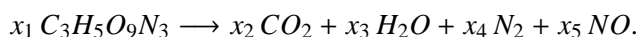


Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 12

Zu Aufgabe 41:

- (a) Eine chemische Verbindung mit der Summenformel $C_3H_5O_9N_3$ zerfällt in ein Gemisch aus CO_2 , H_2O , N_2 und NO . Geben Sie für diese Verbindung eine chemische Reaktionsgleichung an, d.h. bestimmen Sie natürliche Zahlen x_1, \dots, x_5 , so daß



gilt. Stellen Sie zur Lösung dieser Aufgabe ein lineares Gleichungssystem auf und bestimmen Sie eine geeignete Lösung.

- (b) Ist der Zerfall der chemischen Verbindung aus (a) in ein Gemisch nur aus CO_2 , H_2O und NO mit dem chemischen Massenerhaltungsgesetz vereinbar?

Ad (a):

Das Gesetz der multiplen Proportionen von John Dalton besagt, daß die Anzahl der Atome eines bestimmten Elementes bei einer chemischen Reaktion konstant bleibt, auch wenn sie sich auf verschiedene neue chemische Verbindungen verteilen. Bezeichnen wir also mit x_1 die Anzahl der Moleküle der Verbindung $C_3H_5O_9N_3$ (Trisalpetersäureglycerinester = Nitroglycerin) auf der linken Seite der Gleichung, so treten dort $3 \cdot x_1$ Kohlenstoffatome auf. Ebenso viele C-Atome müssen dann insgesamt in den Verbindungen der rechten Seite vorkommen - wobei wir mit x_2 die Anzahl der Kohlendioxidmoleküle, mit x_3 die Anzahl der Wassermoleküle, mit x_4 die Anzahl der Stickstoffmoleküle und mit x_5 die Anzahl der Stickstoffmonoxidmoleküle (jeweils auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung) bezeichnen.

Da Kohlendioxid CO_2 ein Kohlenstoffatom enthält, steuert es x_2 C-Atome bei; Wasser enthält kein C-Atom, also geht in die Bestandsgleichung $0 \cdot x_3$ ein, ebenso für den molekularen Stickstoff N_2 und das Stickstoffmonoxid NO .

Wir erhalten also für den Kohlenstoff die Bestandsgleichung $3x_1 = x_2$.

Die entsprechenden Überlegungen für Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff führen zu den Gleichungen:

$$\begin{array}{llll} \text{Kohlenstoff :} & (I) & 3 \cdot x_1 & = & x_2 \\ \text{Wasserstoff :} & (II) & 5 \cdot x_1 & = & 2 \cdot x_3 \\ \text{Sauerstoff :} & (III) & 9 \cdot x_1 & = & 2 \cdot x_2 + x_3 + x_5 \\ \text{Stickstoff :} & (IV) & 3 \cdot x_1 & = & 2 \cdot x_4 + x_5 \end{array}$$

Dies liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrr} 3 \cdot x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 5 \cdot x_1 & & & - & 2 \cdot x_3 & & = & 0 \\ 9 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_2 & - & x_3 & & - & x_5 & = & 0 \\ 3 \cdot x_1 & & & & & - & 2 \cdot x_4 & - & x_5 & = & 0 \end{array}$$

in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Dieses Gleichungssystem muß in ganzen Zahlen ≥ 0 lösbar sein (gemäß dem Daltonschen Gesetz). Wir erzeugen die Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III-3 \cdot I \\ 3 \cdot II-5 \cdot I}]{IV-I} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{IV-III}]{II-5 \cdot III} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{II \leftrightarrow III}]{IV+II} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3} \cdot (I+II_{\text{neu}})}]{\substack{(-\frac{1}{2}) \cdot IV \\ (-1) \cdot III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $j_1=1 \quad j_2=2 \quad j_3=3 \quad j_4=4 \quad f_1=5$

Gemäß den Regeln für die Auflösung eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform ist also die Unbekannte, die zur Spalte $f_1 = 5$ gehört, d.h. der Spalte, in der keine Stufe steht, durch einen (frei wählbaren) Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ zu ersetzen. Die Variablen, die zu den Spalten gehören, in denen Stufen stehen, d.h. hier zu den Spalten j_1, \dots, j_4 , sind zu berechnen in Abhängigkeit von dem Parameter μ . Es ist also $x_5 = \mu$ frei wählbar, x_1, x_2, x_3, x_4 sind zu berechnen.

4. Gleichung: $x_4 - \frac{5}{2} \cdot \mu = 0 \implies x_4 = \frac{5}{2} \cdot \mu$
3. Gleichung: $x_3 - 5 \cdot \mu = 0 \implies x_3 = 5 \cdot \mu$
2. Gleichung: $x_2 - 6 \cdot \mu = 0 \implies x_2 = 6 \cdot \mu$
1. Gleichung: $x_1 - 2 \cdot \mu = 0 \implies x_1 = 2 \cdot \mu$

Also gilt für jeden Lösungsvektor:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu \\ 6\mu \\ 5\mu \\ \frac{5}{2}\mu \\ \mu \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mu \in \mathbb{R}) \iff x \in \mathbb{L}_{\text{math}} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die allgemeine mathematische Lösung; in unserem chemischen Problem sind die Lösungen einer Restriktion unterworfen: die x_1, \dots, x_5 stehen für Molekülzahlen, müssen also natürliche Zahlen

(oder Null) sein. Da jedes Vielfache von $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ wieder Lösung des Gleichungssystems ist, können wir

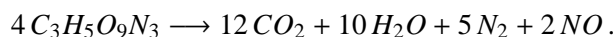
die Lösung $l_0 = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ betrachten; dies ist diejenige Lösung, bei der alle Einträge teilerfremd

(relativ prim) sind; alle anderen Lösungen mit natürlichen Zahlen (oder Null) in den Komponenten

sind Vielfache dieser Lösung. Also ist die Lösungsmenge für unser chemisches Problem

$$\mathbb{L}_{chem} = \mathbb{N}_0 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \left\{ n \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 10 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{N} \vee n = 0 \right\}.$$

Die einfachste nichttriviale Reaktionsgleichung ist also



Ad (b):

Wenn die Zerfallsprodukte nur aus CO_2 , H_2O und NO bestehen sollen, bedeutet dies in obiger mathematischer Lösungsmenge \mathbb{L}_{math} , daß der Anteil an molekularem Stickstoff N_2 zu 0 wird: $x_5 = 0$;

da jede Lösung die Gestalt $x = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ \frac{5}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ hat, erzwingt die Bedingung $x_5 = 0$ daß $\mu = 0$ sein muß;

damit ist die einzige Lösung für diesen Fall $x = 0$. Es handelt sich also nur um einen Spezialfall des im Teil (a) bereits Behandelten; da in \mathbb{L}_{chem} alle Koeffizienten in \mathbb{N}_0 liegen müssen, gibt es keine Zerfallsgleichung mit von 0 verschiedenen Molekülzahlen. Ein Zerfall wie in Teil (b) ist also mit dem Satz über die multiplen Proportionen nicht vereinbar.

Zu Aufgabe 46:

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

- (a) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2)$
- (b) $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos \angle(x, y)$, falls $x, y \neq 0$
- (c) $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$.

Wir wiederholen die Definitionen (mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein vorgegebenes Skalarprodukt): für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\left. \begin{aligned} |x| &= \sqrt{\langle x, x \rangle} \\ \cos \angle(x, y) &= \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \end{aligned} \right\} \quad (\star)$$

Ferner ist das Skalarprodukt bilinear, d.h. es gilt

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} : \left\{ \begin{aligned} \langle x+y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \\ \langle x, y+z \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle \lambda \cdot x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \\ \langle x, \lambda \cdot y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle \end{aligned} \right\} \quad (\star\star) \quad (\text{Vorlesung Lemma (4.3)})$$

symmetrisch, d.h. es gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (\star \star \star)$$

und positiv definit, d.h. es gilt

$$\forall 0 \neq x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle > 0$$

Damit gilt:

$$\forall x, y, a, b \in \mathbb{R}^n : \langle x + y, a + b \rangle \stackrel{(\star\star)}{=} \langle x, a + b \rangle + \langle y, a + b \rangle \stackrel{(\star\star)}{=} (\langle x, a \rangle + \langle x, b \rangle) + (\langle y, a \rangle + \langle y, b \rangle)$$

Insbesondere erhalten wir:

$$\langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \stackrel{(\star\star\star)}{=} \langle x, x \rangle + 2 \cdot \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \stackrel{(\star)}{=} |x|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + |y|^2 \quad (\bullet)$$

und

$$\begin{aligned} \langle x - y, x - y \rangle &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \langle x, x \rangle + \langle x, -y \rangle + \langle -y, x \rangle + \langle -y, -y \rangle \stackrel{(\star\star)}{=} \langle x, x \rangle + (-\langle x, y \rangle) + (-\langle y, x \rangle) + (-(-\langle y, y \rangle)) \\ &\stackrel{(\star\star\star)}{=} \langle x, x \rangle - 2 \cdot \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \stackrel{(\star)}{=} |x|^2 - 2 \cdot \langle x, y \rangle + |y|^2 \quad (\bullet\bullet) . \end{aligned}$$

(Man beachte die formale Ähnlichkeit zur binomischen Formel).

Damit beweisen wir die Aussagen aus Aufgabe (46).

Ad (a):

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \cdot (|x + y|^2 - |x - y|^2) &\stackrel{(\star)}{=} \frac{1}{4} \left(\sqrt{\langle x + y, x + y \rangle}^2 - \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}^2 \right) = \frac{1}{4} (\langle x + y, x + y \rangle - \langle x - y, x - y \rangle) \stackrel{(\bullet)}{=} \\ &\stackrel{(\bullet\bullet)}{=} \frac{1}{4} \left((|x|^2 + 2 \cdot \langle x, y \rangle + |y|^2) - (|x|^2 - 2 \cdot \langle x, y \rangle + |y|^2) \right) = \frac{1}{4} (2 \langle x, y \rangle + 2 \langle x, y \rangle) = \langle x, y \rangle \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Ad (b):

$$|x - y|^2 \stackrel{(\star)}{=} \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}^2 = \langle x - y, x - y \rangle \stackrel{(\bullet\bullet)}{=} |x|^2 - 2 \langle x, y \rangle + |y|^2 \stackrel{(\star)}{=} |x|^2 + |y|^2 - 2 \cdot |x| \cdot |y| \cdot \cos \angle(x, y)$$

$$(\text{denn nach } (\star) \text{ ist } \cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \iff \langle x, y \rangle = |x| \cdot |y| \cdot \cos \angle(x, y) \text{ für } x, y \neq 0).$$

Ad (c):

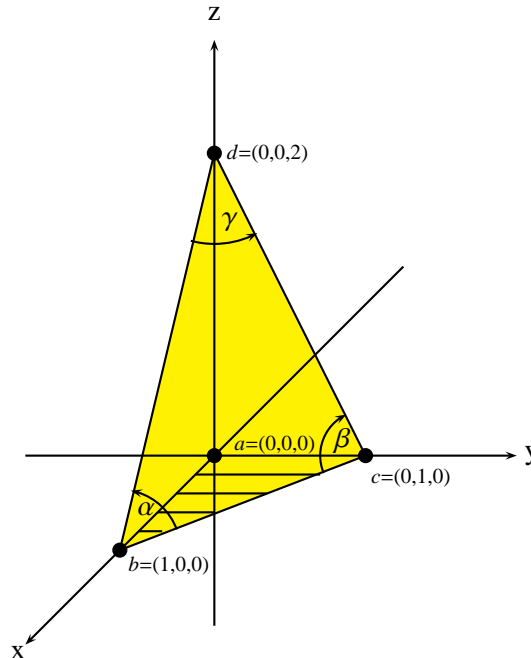
$$\begin{aligned} |x + y|^2 + |x - y|^2 &\stackrel{(\star)}{=} \sqrt{\langle x + y, x + y \rangle}^2 + \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}^2 \stackrel{(\bullet\bullet)}{=} (|x|^2 + 2 \langle x, y \rangle + |y|^2) + (|x|^2 - 2 \langle x, y \rangle + |y|^2) \\ &= 2 \cdot |x|^2 + 2 \cdot |y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2). \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 47:

Wir definieren ein Tetraeder im \mathbb{R}^3 durch seine Eckpunkte $a = (0, 0, 0)$, $b = (1, 0, 0)$, $c = (0, 1, 0)$ und $d = (0, 0, 2)$.

Es sind alle Winkel im Dreieck mit den Ecken b, c, d zu bestimmen, sowie der Winkel, den die Tetraederseite mit den Ecken a, b, c und die Tetraederseite mit den Ecken b, c, d einschließen.

Dabei sind die Vektoren anzugeben, die der Winkelberechnung zugrunde gelegt werden, und die Wahl dieser Vektoren ist zu begründen.



Das gelbe Dreieck kennzeichnet das Dreieck mit den Ecken b, c, d und die Tetraederseite mit diesen Ecken;

das schraffierte Dreieck kennzeichnet das Dreieck mit den Ecken $a = 0, b, c$ sowie die Tetraederseite, die durch diese Ecken definiert wird.

Der Winkel im räumlichen Dreieck Δ_{bcd} an der Ecke b ist berechenbar nach Vorlesung (4.6):

$$x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \implies \cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \text{ definiert den Winkel } \angle(x, y) \text{ zwischen } x \text{ und } y.$$

Der Winkel α an der Ecke b des Dreiecks wird eingeschlossen von den Schenkeln \vec{bc} und \vec{bd} .

Es handelt sich also um den Winkel zwischen den Vektoren $c - b$ und $d - b$:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{\langle c - b, d - b \rangle}{|c - b| \cdot |d - b|} = \frac{\langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 2) \rangle}{|(-1, 1, 0)| \cdot |(-1, 0, 2)|} = \frac{(-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\implies \alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \implies \alpha \approx 71,56505115^\circ$$

Der Winkel β an der Ecke c des Dreiecks wird eingeschlossen von den Schenkeln \vec{cb} und \vec{cd} .

Es handelt sich also um den Winkel zwischen den Vektoren $b - c$ und $d - c$:

$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \frac{\langle b - c, d - c \rangle}{|b - c| \cdot |d - c|} = \frac{\langle (1, -1, 0), (0, -1, 2) \rangle}{|(1, -1, 0)| \cdot |(0, -1, 2)|} = \frac{1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\implies \beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) \implies \beta \approx 71,56505115^\circ$$

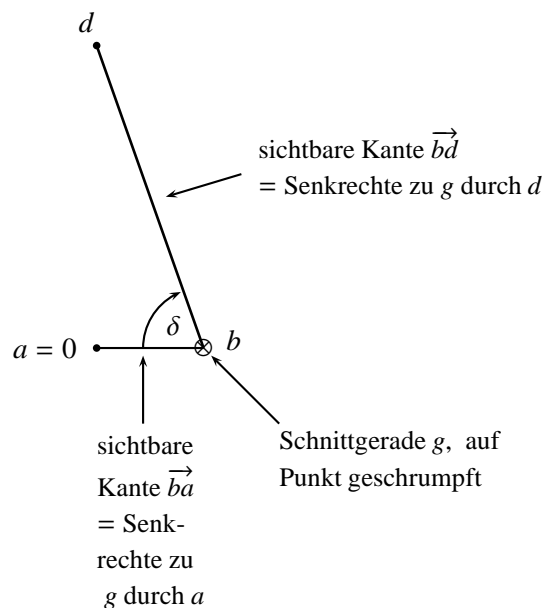
Der Winkel γ an der Ecke d des Dreiecks wird eingeschlossen von den Schenkeln \vec{db} und \vec{dc} .
Es handelt sich also um den Winkel zwischen den Vektoren $b - d$ und $c - d$:

$$\begin{aligned}\cos(\gamma) &= \frac{\langle b - d, c - d \rangle}{|b - d| \cdot |c - d|} = \frac{\langle (1, 0, -2), (0, 1, -2) \rangle}{|(1, 0, -2)| \cdot |(0, 1, -2)|} = d \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \gamma \approx 36,869897653^\circ.$$

Nun bestimmen wir den Winkel δ zwischen der Tetraederseite S_1 mit den Ecken $a = 0, b, c$ und der Tetraederseite S_2 mit den Ecken b, c, d , d.h. zwischen den Ebenen, die diese Dreiecke enthalten.

Die beiden Ebenen enthalten beide die Punkte b und c , d.h. auch die Gerade g durch diese Punkte; diese hat den Richtungsvektor $b - c = (1, -1, 0)$. Um den Winkel zwischen den Tetraederseiten zu bestimmen, machen wir den Winkel zuerst geometrisch sichtbar: wir wandern um das Tetraeder herum, bis wir gerade vor dem Punkt b stehen, und blicken genau in die Richtung der Schnittgeraden g ; auf diese Art schrumpft diese zu einem Punkt zusammen, und auch die Tetraederseiten S_1 und S_2 sind nur noch als Kanten zu sehen. Diese Kanten sind die Projektionen der jeweiligen Dreiecksseiten auf die Geraden in den zugehörigen Ebenen, die senkrecht zur Schnittgeraden g verlaufen: von der Dreiecksseite \vec{bd} sieht man nur noch die Senkrechte zu g durch den Punkt d ; analog sieht man von der Dreiecksseite \vec{ba} nur noch die Senkrechte zu g durch $a = 0$. Der gesuchte Winkel δ ist dann gerade der Winkel zwischen diesen Senkrechten:



Wir brauchen also

- (1.) den Richtungsvektor der Geraden in der Ebene E_1 , die das Dreieck Δ_{abc} enthält, die senkrecht auf g steht, und
- (2.) den Richtungsvektor der Geraden in der Ebene E_2 , die das Dreieck Δ_{bcd} enthält, die senkrecht auf g steht.

Zu (1.): ein Vektor v_1 in $E_1 = x$ -y-Ebene, der senkrecht zu $(1, -1, 0)$, steht, ist sofort bestimmbar: es ist $v_1 = (u, v, 0)$ mit $u, v \in \mathbb{R}$, und die Bedingung $0 = \langle (1, -1, 0), (u, v, 0) \rangle = u - v$ liefert $u = v$; deshalb ist $v_1 = (1, 1, 0) \in x$ -y-Ebene geeignet.

Zu (2.): Gesucht ein Vektor $v_2 \in \text{span}\{d-b, d-c\} = \text{span}\{(-1, 0, 2), (0, -1, 2)\}$ senkrecht zu $(1, -1, 0)$. Da $\text{span}\{(-1, 0, 2), (0, -1, 2)\}$ aus allen Linearkombinationen der beiden Vektoren $(-1, 0, 2)$ und $(0, -1, 2)$ besteht, hat v_2 die Gestalt $v_2 = \lambda \cdot (-1, 0, 2) + \mu \cdot (0, -1, 2)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Damit ergibt sich die Bedingung:

$$\begin{aligned} v_2 \perp (1, -1, 0) &\iff 0 = \langle v_2, (1, -1, 0) \rangle = \langle \lambda(-1, 0, 2) + \mu(0, -1, 2), (1, -1, 0) \rangle \\ &\stackrel{\text{bilinear}}{\iff} 0 = \underbrace{\lambda \langle (-1, 0, 2), (1, -1, 0) \rangle}_{= -1} + \underbrace{\mu \langle (0, -1, 2), (1, -1, 0) \rangle}_{= 1} = -\lambda + \mu \implies \lambda = \mu \\ &\implies v_2 = \mu(-1, 0, 2) + \mu(0, -1, 2) = (-\mu, -\mu, 2\mu + 2\mu) = (-\mu, -\mu, 4\mu) = -\mu(1, 1, -4). \end{aligned}$$

Also ist $v_2 = (1, 1, -4)$ geeignet, und wir erhalten für den Winkel δ :

$$\cos(\delta) = \cos \angle(v_1, v_2) = \frac{\langle v_1, v_2 \rangle}{|v_1| \cdot |v_2|} = \frac{\langle (1, 1, 0), (1, 1, -4) \rangle}{|(1, 1, 0)| \cdot |(1, 1, -4)|} = \frac{2}{\sqrt{2} \sqrt{1+1+16}} = \frac{2}{\sqrt{2} \sqrt{2 \cdot 9}} = \frac{2}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{1}{3}.$$

Damit ist $\delta = \arccos(\frac{1}{3}) \approx 70,52877934^\circ$.

Zu Aufgabe 48:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal; dann gilt:

- (a) b_1, \dots, b_n Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \implies A \cdot b_1, \dots, A \cdot b_n$ Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .
- (b) $\angle(Ax, Ay) = \angle(x, y)$ (für alle $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$).
- (c) Die orthogonalen Matrizen bilden eine Untergruppe der Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ der invertierbaren Matrizen in \mathbb{R}^n (bzgl. der Matrixmultiplikation).

Beweis:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt orthogonal, wenn $A^T \cdot A = E_n$ (\clubsuit).

$$b_1, \dots, b_n \text{ Orthonormalbasis von } \mathbb{R}^n \iff \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Ad (a):

Es sei b_1, \dots, b_n eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \implies \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = x^T y \quad (\text{Matrixprodukt}) \quad (\bullet).$$

Zu zeigen ist, daß Ab_1, \dots, Ab_n Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n ist, d.h. gemäß der Definition ($\clubsuit\clubsuit$):

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : \langle Ab_i, Ab_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Für beliebige $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle Ab_i, Ab_j \rangle &\stackrel{(\bullet)}{=} (Ab_i)^T \cdot (Ab_j) \stackrel{(CD)^T = D^T \cdot C^T}{=} (b_i^T A^T) \cdot (Ab_j) \stackrel{\text{assoz.}}{=} b_i^T \cdot (A^T A) b_j \stackrel{\substack{A \\ \text{orthogonal}}}{=} b_i^T \cdot E_n \cdot b_j = \\ &= b_i^T b_j \stackrel{(\bullet)}{=} \langle b_i, b_j \rangle \stackrel{b_1, \dots, b_n \text{ Orthonormalbasis}}{=} \delta_{ij} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Ad (b):

Es seien nun $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Dann gilt:

$$\langle Ax, Ay \rangle \underset{(\bullet)}{=} (Ax)^T \cdot (Ay) \underset{(a)}{\stackrel{\text{wie in}}{=}} (x^T A^T) \cdot (Ay) \stackrel{\text{assoz.}}{=} x^T (A^T A) y \underset{\text{orthogonal}}{\stackrel{A}{=}} x^T \cdot E_n \cdot y = x^T y \underset{(\bullet)}{=} \langle x, y \rangle \quad (\star).$$

Überdies ist mit $x \neq 0$ wegen der positiven Definitheit des Skalarprodukts (Vorl. Lemma (4.3)(c))

$$\langle x, x \rangle > 0 \underset{y:=x}{\stackrel{\text{setze in } (\star)}{=}} \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle > 0 \underset{\text{pos. definit}}{\stackrel{\langle \cdot, \cdot \rangle}{\implies}} Ax \neq 0$$

(da ja sonst $\langle Ax, Ax \rangle = \langle 0, 0 \rangle = 0$, Widerspruch !).

Damit folgt für den Kosinus des Winkels zwischen Ax und Ay :

$$\cos \angle(Ax, Ay) = \frac{\langle Ax, Ay \rangle}{|Ax| \cdot |Ay|} \underset{(\star)}{=} \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle Ax, Ax \rangle} \cdot \sqrt{\langle Ay, Ay \rangle}} \underset{\text{mit } x=y}{\stackrel{(\star)}{=}} \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \stackrel{\text{Def.}}{=} \cos \angle(x, y).$$

Aus der Analysis ist bekannt, daß $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ eine bijektive Funktion ist; andererseits ist nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz (Vorlesung (4.4)) für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$: $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$

$$\implies \forall x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : -1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{|x| \cdot |y|} \leq 1.$$

Also gilt: $\cos \angle(Ax, Ay) = \cos \angle(x, y) \implies \angle(Ax, Ay) = \angle(x, y) \in [0, \pi]$. q.e.d.

Ad (c):

Wir benutzen die Definition (1.9) der Vorlesung und zeigen damit, daß

$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A \text{ orthogonal}\}$ eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $GL(n, \mathbb{R})$ ist (Vorlesung Satz (2.13)).

Zu zeigen ist also:

- (i) $\emptyset \neq O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$
- (ii) $\forall A, B \in O(n) : A \cdot B \in O(n)$
- (iii) $\forall A \in O(n) : A^{-1} \in O(n)$

Ad (i):

$$E_n^T = E_n \implies E_n^T \cdot E_n = E_n \cdot E_n = E_n \implies E_n \in O(n) \implies O(n) \neq \emptyset$$

Vorlesung Satz (4.11), $[a \implies c]$, liefert: $A \text{ orthogonal} \implies A \text{ invertierbar} \implies A \in GL(n, \mathbb{R})$, also: $O(n) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$.

Ad (ii):

$$A, B \in O(n) \underset{\text{Def.}}{\implies} A^T \cdot A = E_n \wedge B^T \cdot B = E_n.$$

$$\text{Damit folgt: } (AB)^T \cdot AB \underset{(2.12)(d)}{\stackrel{\text{Regel}}{=}} (B^T A^T) \cdot AB \stackrel{\text{assoz.}}{=} B^T \underbrace{(A^T A)}_{=E_n} B = B^T E_n B = B^T B = E_n$$

$$\underset{\text{Def.}}{\implies} AB \text{ orthogonal, d.h. } AB \in O(n) \quad \text{q.e.d.}$$

Ad(iii):

Nach Satz (4.11) Vorlesung gilt: $A \text{ orthogonal} \implies A \text{ invertierbar und } A^{-1} = A^T \implies$

$$\implies (A^{-1})^T \cdot A^{-1} = (A^T)^T \cdot A^{-1} \underset{(2.12)(a)}{\stackrel{\text{Regel}}{=}} A \cdot A^{-1} = E_n \underset{\text{orthogonal}}{\stackrel{\text{Def.}}{\implies}} A^{-1} \text{ orthogonal, d.h. } A^{-1} \in O(n)$$

q.e.d.