

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 8

Zunächst eine Vorbemerkung zu Blockmatrizen: Man kann jede Matrix A in Blöcke zerlegen, indem man ihre Einträge in Untermatrizen zusammenfaßt. Zum Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Die inneren Matrixklammern dienen nur zur Abgrenzung der Untermatrizen und sind kein Teil der Matrixdarstellung.

Sind die Formate der Blöcke passend gewählt, so kann man das Matrixprodukt auch in Blockform ausführen:

Seien die Matrizen M, P in Blockmatrixform gegeben, d.h.

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_N \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & \cdots \\ U_2 & V_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ U_N & V_N & \cdots \end{pmatrix} \quad \text{mit } N \in \mathbb{N} \text{ und den Untermatrizen}$$

$$\begin{aligned} A_i &\in K^{m \times n_i} \quad \wedge \quad U_i \in K^{n_i \times p} \\ B_i &\in K^{r \times n_i} \quad \wedge \quad V_i \in K^{n_i \times q} \end{aligned} \quad \text{für } 1 \leq i \leq N, \quad m, r, n_i, p, q \in \mathbb{N}$$

Dann ist das Produkt $M \cdot P$ wohldefiniert und es gilt:

$$M \cdot P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_N \\ B_1 & B_2 & \cdots & B_N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 & V_1 & \cdots \\ U_2 & V_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ U_N & V_N & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 U_1 + \cdots + A_N U_N & A_1 V_1 + \cdots + A_N V_N & \cdots \\ B_1 U_1 + \cdots + B_N U_N & B_1 V_1 + \cdots + B_N V_N & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Wir überprüfen dies exemplarisch an der linken oberen Ecke der Produktmatrix $M \cdot P$, d.h. für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq p$:

$$(MP)_{ij} = \left((A_1)_{i1} \cdots (A_1)_{in_1} (A_2)_{i1} \cdots (A_2)_{in_2} \cdots (A_N)_{i1} \cdots (A_N)_{in_N} \right) \cdot \begin{pmatrix} (U_1)_{1j} \\ \vdots \\ (U_1)_{n_1 j} \\ (U_2)_{1j} \\ \vdots \\ (U_2)_{n_2 j} \\ \vdots \\ (U_N)_{1j} \\ \vdots \\ (U_N)_{n_N j} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Def.} \\ \equiv \\ \text{Matrixprodukt} \end{matrix}$$

$$= \sum_{k=1}^{n_1} (A_1)_{ik} (U_1)_{kj} + \sum_{k=1}^{n_2} (A_2)_{ik} (U_2)_{kj} + \dots + \sum_{k=1}^{n_N} (A_N)_{ik} (U_N)_{kj} \stackrel{\text{Def. Produkt}}{=} (A_1 U_1)_{ij} + (A_2 U_2)_{ij} + \dots + (A_N U_N)_{ij}$$

$$\stackrel{\text{Def. Summe}}{=} (A_1 U_1 + A_2 U_2 + \dots + A_N U_N)_{ij} \quad \text{q.e.d.}$$

Zu Aufgabe 29:

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; dann ist A invertierbar. Bestimmen Sie A^{-1} .

Beweis :

Zunächst gilt nach Vorlesung Satz (2.23) und Lemma (2.24): Ist die Matrix A invertierbar, so kann sie durch elementare Zeilentransformationen in die Einheitsmatrix übergeführt werden. Dabei entsprechen die elementaren Zeilentransformationen der Multiplikation von links mit Elementarmatrizen vom Typ P_i^j , $Q_i^j(\lambda)$, $S_i(\lambda)$, wie sie in Vorlesung (2.15) definiert wurden; insbesondere sind diese (für $\lambda \neq 0$ im Falle der $S_i(\lambda)$) alle invertierbar. Da nach (2.13) die invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$ die Gruppe $GL(n, K)$ bilden, ist ein beliebiges Produkt von Elementarmatrizen wieder invertierbar, also folgt:

$$A \in K^{n \times n} \text{ invertierbar} \implies \exists F \in GL(n, K) : F \cdot A = E_n \xrightarrow[\text{(2.21)}]{\text{Vorl.}} F = A^{-1} \implies F \cdot E_n = A^{-1}$$

Umgekehrt gilt: Ist A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix transformierbar, d.h. gibt es $F \in GL(n, K)$, so daß $F \cdot A = E_n$, so folgt: $A = F^{-1} \in GL(n, K)$, also A invertierbar.

Mit der Blockmatrixmultiplikation von oben folgt dann für $(A \ E_n)$ mit den Blöcken A und E_n :

$$F \cdot (A \ E_n) = (FA \ FE_n) = (E_n \ A^{-1}).$$

Führen wir also die Matrix $(A \ E_n)$ durch elementare Zeilentransformationen über in die Matrix $(E_n \ T)$, so gilt nach eben zwangsläufig $T = A^{-1}$.

Wir führen dieses Verfahren für A durch; dabei bezeichne zum Beispiel $II + \lambda \cdot I$ die Addition des λ -fachen der ersten Zeile zur zweiten Zeile.

$$(A \ E_4) =: (A | E_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{IV-I} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{I-II} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{II-III} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{III-IV} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Also: } A \text{ invertierbar und } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Man verifiziere } A \cdot A^{-1} = E_4!)$$

Zu Aufgabe 30:

Sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times m}$.

(a) Die Matrix $M := \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \in K^{(m+n) \times (m+n)}$ ist invertierbar $\iff E_m - AB \in K^{m \times m}$ und

$E_n - BA \in K^{n \times n}$ sind invertierbar.

(b) Wenn M invertierbar ist, bestimme M^{-1} in Blockschreibweise.

(c) Mit Hilfe von (b) ist die Inverse von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.

Beweis zu (a) und (b):

„ \Leftarrow “ : Es seien $E_m - AB$ und $E_n - BA$ invertierbar mit Inversen $X = (E_n - BA)^{-1} \in K^{n \times n}$ und $Y = (E_m - AB)^{-1} \in K^{m \times m}$.

Eine Möglichkeit, die Invertierbarkeit einer Matrix zu überprüfen bietet die Fredholmsche Alternative; deren erster Teil lautet:

Besitzt das Gleichungssystem $Ax = 0$ (mit $A \in K^{n \times n}$) genau eine Lösung, nämlich $x = 0$, so ist die Matrix A invertierbar, und das Gleichungssystem $Ax = b$ ist für jedes $b \in K^n$ eindeutig lösbar mit der Lösung $x = A^{-1}b$. Man kann also gleich versuchen, die Gleichung $Ax = b$ nach x aufzulösen und erhält im Erfolgsfall damit zugleich die inverse Matrix A^{-1} .

Setzen wir also $x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\tilde{x}} \end{pmatrix} \in K^{m+n}$, d.h. $\tilde{x} \in K^m$ und $\tilde{\tilde{x}} \in K^n$, und analog $b = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{\tilde{b}} \end{pmatrix} \in K^{m+n}$ in Blockschreibweise, und versuchen wir das Gleichungssystem $M \cdot x = b$ nach x aufzulösen:

$$Mx = b \iff \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{\tilde{b}} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Blockmatrizen}]{\text{siehe oben}} \begin{pmatrix} E_m \tilde{x} + A \tilde{\tilde{x}} \\ B \tilde{x} + \tilde{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{\tilde{b}} \end{pmatrix}$$

Dies liefert zwei Matrixgleichungen:

$$(I) \quad \tilde{x} + A \tilde{\tilde{x}} = \tilde{b}$$

$$(II) \quad B \tilde{x} + \tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{b}}$$

Dann: $(I) \implies \tilde{x} = \tilde{b} - A \tilde{\tilde{x}}$

das setzen wir in (II) ein:

$$\begin{aligned} B \cdot (\tilde{b} - A \tilde{\tilde{x}}) + \tilde{\tilde{x}} &= \tilde{\tilde{b}} && \xRightarrow{\text{Distrib.}} B\tilde{b} - BA\tilde{\tilde{x}} + \tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{b}} \implies \tilde{\tilde{x}} - BA\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{b}} - B\tilde{b} \\ &&& \xRightarrow[\text{neutral}]{E_n} E_n \tilde{\tilde{x}} - BA\tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{b}} - B\tilde{b} \\ &&& \xRightarrow{\text{Distr.}} (E_n - BA) \cdot \tilde{\tilde{x}} = \tilde{\tilde{b}} - B\tilde{b} \\ &&& \xRightarrow[\text{invertierbar}]{E_n - BA} \tilde{\tilde{x}} = \underbrace{(E_n - BA)^{-1}}_{= X} \cdot (\tilde{\tilde{b}} - B\tilde{b}) \\ &&& \implies \tilde{\tilde{x}} = -XB\tilde{b} + X\tilde{\tilde{b}} \end{aligned}$$

Nun Rücksubstitution in (I) :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \tilde{b} - A \tilde{\tilde{x}} = \tilde{b} - A(-XB\tilde{b} + X\tilde{\tilde{b}}) \\ &= \tilde{b} + AXB\tilde{b} - AX\tilde{\tilde{b}} = E_m \tilde{b} + AXB\tilde{b} - AX\tilde{\tilde{b}} \\ &\stackrel{\text{Distr.}}{=} (E_m + AXB) \tilde{b} - AX\tilde{\tilde{b}} \end{aligned}$$

Das schreiben wir wieder in Blockdarstellung:

$$x = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\tilde{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (E_m + AXB)\tilde{b} - AX\tilde{\tilde{b}} \\ -XB\tilde{b} + X\tilde{\tilde{b}} \end{pmatrix} \stackrel{\text{siehe}}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} E_m + AXB & -AX \\ -XB & X \end{pmatrix}}_{= M^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{\tilde{b}} \end{pmatrix} \quad \text{Damit haben wir}$$

auch gezeigt, daß M invertierbar ist: setzen wir $b = 0$, d.h. $Mx = 0$, so folgt ja

$$x = \begin{pmatrix} E_m + AXB & -AX \\ -XB & X \end{pmatrix} \cdot 0 = 0, \text{ und nach obiger Bemerkung ist damit}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E_m + AXB & -AX \\ -XB & X \end{pmatrix} \quad (\text{mit } X = (E_n - BA)^{-1}) \quad \text{q.e.d.}$$

Alternativ:

Wir können gleich die Inverse in Blockdarstellung ansetzen und die Erfüllbarkeit der Bedingungsgleichung für die Inverse untersuchen:

Es seien also $U \in K^{m \times m}$, $V \in K^{m \times n}$, $W \in K^{n \times m}$, $Z \in K^{n \times n}$ und es gelte

$$\begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix} = E_{m+n} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Gemäß den Regeln für das Blockmatrixprodukt aus der Einleitung gilt dann:

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m U + AW & E_m V + AZ \\ BU + E_n W & BV + E_n Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + AW & V + AZ \\ BU + W & BV + Z \end{pmatrix}$$

Damit folgen durch Vergleich der Blöcke die vier Matrixgleichungen

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & U + AW = E_m \\ \text{(II)} \quad & V + AZ = 0 \\ \text{(III)} \quad & BU + W = 0 \\ \text{(IV)} \quad & BV + Z = E_n \end{aligned}$$

Gleichung **(I)** liefert: $U = E_m - AW$; das setzen wir in Gleichung **(III)** ein:

$$0 = BU + W = B(E_m - AW) + W \stackrel{\text{Distr.}}{=} B - BAW + W$$

$$\implies W - BAW = -B$$

$$\implies E_n W - BAW = -B$$

$$\implies (E_n - BA)W = -B$$

$$\stackrel{\text{Distr.}}{\implies} \stackrel{E_n - BA}{\implies} \underset{\text{invertierbar}}{W} = - \underbrace{(E_n - BA)^{-1} B}_{= X} = -XB$$

Rücksubstitution in Gleichung **(I)** :

$$U = E_m - AW = E_m - A(-XB) = E_m + AXB$$

Die Gleichung **(II)** liefert $V = -AZ$; damit gehen wir in die Gleichung **(IV)** :

$$E_n = BV + Z = B(-AZ) + Z = Z - BAZ \stackrel{E_n}{\stackrel{\text{neutral}}{=}} E_n Z - BAZ \stackrel{\text{Distr.}}{=} (E_n - BA)Z$$

$$\stackrel{X=(E_n-BA)^{-1}}{\implies} \underset{\text{Vorl.(2.21)}}{Z} = X$$

Rücksubstitution in Gleichung **(II)** :

$$V = -AZ = -AX.$$

Damit haben wir alle Untermatrizen in dem Blockmatrix-Ansatz bestimmt und es folgt:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m + AXB & -AX \\ -XB & X \end{pmatrix}$$

Verifizierung:

$$\begin{aligned} M \cdot \begin{pmatrix} E_m + AXB & -AX \\ -XB & X \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_m + AXB & -AX \\ -XB & X \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Blockmatrix-}}{=} \text{produkt} \begin{pmatrix} E_m(E_m + AXB) + A(-XB) & E_m(-AX) + AX \\ B(E_m + AXB) + E_n(-XB) & B(-AX) + E_nX \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m + AXB - AXB & -AX + AX \\ B + BAXB - XB & -BAX + X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B + BAXB - E_nXB & -BAX + E_nX \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Distr.}}{=} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B + (BA - E_n)XB & (-BA + E_n)X \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B - \underbrace{(E_n - BA)XB}_{= E_n} & \underbrace{(E_n - BA)X}_{= E_n} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(E_n - BA)^{-1} = X}{=} \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ B - B & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es fällt auf, daß wir in beiden Beweisen die zweite Invertierbarkeitsvoraussetzung für $E_m - AB$ gar nicht benötigt haben. Wenn wir allerdings anders vorgegangen wären und beispielsweise im Alternativbeweis zuerst Gleichung **(III)** benutzt hätten, d.h.

$$\begin{aligned} W = -BU &\stackrel{\text{in Gleichung I}}{\implies} U = E_m - AW = E_m - A(-BU) = E_m + ABU \implies E_m = U - ABU = \\ E_m U - ABU &= (E_m - AB)U \stackrel{E_m - AB}{\text{invertierbar}} U = (E_m - AB)^{-1} = Y \end{aligned}$$

so brauchen wir, daß $E_m - AB$ ebenfalls invertierbar ist. Dann bekommen wir:

$$\textbf{(I)} \implies W = -BU = -BY,$$

$$\textbf{(IV)} \implies Z = E_n - BV$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{in}}{\implies} V = -AZ = -A(E_n - BV) = -A + ABV \implies E_m V - ABV = -A \\ &\stackrel{\text{III}}{\implies} (E_m - AB)V = -A \stackrel{(E_m - AB)^{-1} = Y}{\implies} V = -YA \end{aligned}$$

und schließlich in **(IV)** : $Z = E_n - B(-YA) = E_n + BYA$.

Auf diese Weise erhält man als Inverse

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} Y & -YA \\ -BY & E_n + BYA \end{pmatrix} \quad \text{mit } Y = (E_m - AB)^{-1}. \quad (\star\star)$$

Die Lösung liegt darin, daß aus der Invertierbarkeit der Matrix $E_n - BA$ allein schon die Invertierbarkeit von $E_m - AB$ folgt:

Es sei $E_n - BA$ invertierbar mit der Inversen $X = (E_n - BA)^{-1}$. Dann ist $Y := E_m + AXB$ die inverse Matrix zu $E_m - AB$:

$$Y \cdot (E_m - AB) = (E_m + AXB)(E_m - AB) \stackrel{\text{Distr.}}{=} E_m - AB + AXB - AXBAB \stackrel{\text{Distr.}}{=} E_m - AB + A(X - XBA)B =$$

$$E_m - AB + A(XE_n - XBA)B \stackrel{\text{Distr.}}{=} E_m - AB + A \underbrace{X(E_n - BA)}_{= E_n} B \stackrel{X \text{ invers zu } E_n - BA}{=} E_m - AB + AB = E_m$$

Ganz analog folgt aus der Invertierbarkeit von $E_m - AB$ mit Inverser $Y = (E_m - AB)^{-1}$ diejenige von $E_n - BA$ und es ist $X = (E_n - BA)^{-1} = E_n + BYA$.

$$\begin{aligned} (E_n + BYA)(E_n - BA) &\stackrel{\text{Distr.}}{=} E_n - BA + BYA - BYABA \stackrel{\text{Distr.}}{=} E_n - BA + B(Y - YAB)A \\ &= E_n - BA + B(YE_m - YAB)A \stackrel{\text{Distr.}}{=} E_n - BA + B \underbrace{Y(E_m - AB)}_{= E_m} A \stackrel{Y \text{ invers zu } E_m - AB}{=} E_n - BA + BA = E_n \end{aligned}$$

„ \Rightarrow “ :

Nun setzen wir voraus, daß $M = \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix}$ invertierbar ist und wollen zeigen, daß dies dann auch für die Matrizen $E_n - BA$ und $E_m - AB$ gilt. Sei also $M^{-1} := \begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix}$ gleich in der Blockmatrixdarstellung gegeben mit $U \in K^{m \times m}$, $V \in K^{m \times n}$, $W \in K^{n \times m}$, $Z \in K^{n \times n}$; dann ist

$$\begin{aligned} E_{m+n} &= \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix} = M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U & V \\ W & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m U + AW & E_m V + AZ \\ BU + E_n W & BV + E_n Z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U + AW & V + AZ \\ BU + W & BV + Z \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{wie in}} \text{„}\Leftarrow\text{“} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & U + AW = E_m \\ \text{(II)} \quad & V + AZ = 0 \\ \text{(III)} \quad & BU + W = 0 \\ \text{(IV)} \quad & BV + Z = E_n \end{aligned}$$

Also:

$$\text{(III)} \Rightarrow W = -BU \xrightarrow[\text{(I)}]{\text{in}} E_m = U + AW = U + A(-BU) = E_m U - ABU \stackrel{\text{Distr.}}{=} (E_m - AB)U.$$

Die Gleichung $E_m = (E_m - AB)U$ liefert aber mit Vorlesung (2.21), daß $E_m - AB$ invertierbar ist mit $(E_m - AB)^{-1} = U$.

Analog:

$$\text{(II)} \Rightarrow V = -AZ \xrightarrow[\text{(IV)}]{\text{in}} E_n = BV + Z = B(-AZ) + Z = E_n Z - BAZ \stackrel{\text{Distr.}}{=} (E_n - BA)Z$$

Wieder folgt aus Vorlesung (2.21) und $(E_n - BA)Z = E_n$, daß $E_n - BA$ invertierbar ist mit Inverser $(E_n - BA)^{-1} = Z$ q.e.d.

Beweis von (c):

Wir zerlegen die Matrix in Blöcke:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{d.h. } E_1 = (1), E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sind Einheitsmatrizen, } A = (1 \ 1 \ 1), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Teil (b) ergibt sich, falls $E_1 - AB$ und $E_3 - BA$ invertierbar sind, daß M invertierbar ist; dafür reicht, wie wir oben gesehen haben, die Invertierbarkeit von $E_1 - AB$ (wir wählen natürlich die Matrix mit dem kleineren Format), und dann hat nach $(\star\star)$ die Inverse zu M die Gestalt

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} Y & -YA \\ -BY & E_n + BYA \end{pmatrix} \text{ mit } Y = (E_1 - AB)^{-1} ; \text{ es ist } E_1 - AB = (1) - (1 \ 1 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 3 = -2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_1 - AB \text{ invertierbar mit } Y = (E_1 - AB)^{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Also: } M^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} & -(-\frac{1}{2})(1 \ 1 \ 1) \\ \hline -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-\frac{1}{2}) & E_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-\frac{1}{2})(1 \ 1 \ 1) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} -\frac{1}{2} & (\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}) \\ \hline \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 31:

K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ invertierbar und durch elementare Zeilentransformationen vom Typ (II) analog dem Beweis zu Satz (2.23) Vorlesung in obere Dreiecksmatrix R transformierbar. Dann gibt es eine untere Dreiecksmatrix $L \in K^{n \times n}$ mit $l_{ii} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$, so daß $A=LR$.

Beweis:

Wir betrachten den Algorithmus aus Satz (2.23) mit $A \in K^{n \times n}$ invertierbar.

Das Ziel im ersten Schritt ist es, durch elementare Zeilentransformationen die erste Spalte in die Ge-

stalt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ überzuführen. Falls $A_{11} = 0$, so muß wegen der Invertierbarkeit von A ein Eintrag A_{i1} der

ersten Spalte von A von 0 verschieden sein, d.h. es gibt $s_1 \geq 2$, so daß $A_{s_1 1} \neq 0$. Wir vertauschen dann die Zeilen 1 und s_1 mittels der Permutationsmatrix $P_{s_1}^1$.

Falls $A_{11} \neq 0$ setzen wir $s_1 = 1 \Rightarrow P_1^1 = E_n$.

Nun ist $(P_{s_1}^1 A)_{11} \neq 0$ und wir können mit Hilfe der ersten Zeile die Einträge in der ersten Spalte von $P_{s_1}^1 A$ unterhalb der ersten Zeile mittels elementarer Zeilentransformationen vom Typ (II) zu Null machen:

$$Q_2^1(\lambda_2^{(1)})P_{s_1}^1 A \text{ mit } \lambda_2^{(1)} = -\frac{(P_{s_1}^1 A)_{12}}{(P_{s_1}^1 A)_{11}} \text{ zum Beispiel erzeugt } (Q_2^1(\lambda_2^{(1)})P_{s_1}^1 A)_{12} = 0.$$

Nach endlich vielen Schritten erhalten wir in $A_1 = Q_n^1(\lambda_n^{(1)})Q_{n-1}^1(\lambda_{n-1}^{(1)}) \cdots Q_3^1(\lambda_3^{(1)})Q_2^1(\lambda_2^{(1)})P_{s_1}^1 A$ in der ersten Spalte die gewünschte Gestalt.

Nun wenden wir das gleiche Verfahren auf die zweite Spalte von A_1 an, wieder zunächst mit einer Permutation der Form $P_{s_2}^2$ mit einem Index $s_2 \geq 3$, falls der Eintrag $(A_1)_{22} = 0$.

Schließlich erhalten wir eine obere Dreiecksmatrix

$$R = Q_n^{n-1}(\lambda_n^{(n-1)})P_{s_{n-1}}^{n-1}Q_n^{n-2}(\lambda_n^{(n-2)})Q_{n-1}^{n-2}(\lambda_{n-1}^{(n-2)})P_{s_{n-2}}^{n-2} \cdots Q_3^2(\lambda_3^{(2)})P_{s_2}^2Q_n^1(\lambda_n^{(1)})Q_{n-1}^1(\lambda_{n-1}^{(1)}) \cdots Q_3^1(\lambda_3^{(1)})Q_2^1(\lambda_2^{(1)})P_{s_1}^1A$$

Nach Voraussetzung treten keine Permutationsmatrizen im Algorithmus auf, d.h. es ist

$$R = Q_n^{n-1}(\lambda_n^{(n-1)})Q_n^{n-2}(\lambda_n^{(n-2)})Q_{n-1}^{n-2}(\lambda_{n-1}^{(n-2)}) \cdots Q_3^2(\lambda_3^{(2)})Q_n^1(\lambda_n^{(1)})Q_{n-1}^1(\lambda_{n-1}^{(1)}) \cdots Q_3^1(\lambda_3^{(1)})Q_2^1(\lambda_2^{(1)})A.$$

Ferner ist in allen auftretenden Transformationsmatrizen $Q_i^j(\lambda)$ vom Typ (II) der Spaltenindex j kleiner dem Zeilenindex i , d.h. es gilt:

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & \lambda & \ddots & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \text{ in der } i\text{-ten Zeile und } j\text{-ten Spalte.}$$

Damit sind alle $Q_i^j(\lambda)$ untere Dreiecksmatrizen. In (2.15) Vorlesung wurde gezeigt, daß die Elementarmatrizen invertierbar sind; insbesondere gilt: $Q_i^j(\lambda)^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$ (★).

Hat also R die Gestalt

$R = Q_N \cdot Q_{N-1} \cdots Q_1 \cdot A$ mit Elementarmatrizen Q_j vom Typ (II), so folgt

$$Q_N^{-1}R = Q_{N-1} \cdots Q_1 \cdot A \xrightarrow[\text{Inversionen}]{\text{endl. viele}}$$

$$Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} \cdots Q_{N-1}^{-1} \cdot Q_N^{-1} \cdot R = A$$

Da alle Q_j untere Dreiecksmatrizen sind, sind es nach (★) auch alle Q_j^{-1} , und als Elementarmatrizen vom Typ (II) haben sie auch alle nur Einsen in der Hauptdiagonalen. Da weiter nach Aufgabe (25) (c) das Produkt unterer Dreiecksmatrizen wieder eine untere Dreiecksmatrix ist, gilt: $L := Q_1^{-1} \cdot Q_2^{-1} \cdots Q_N^{-1}$ ist eine untere Dreiecksmatrix und es gilt natürlich $LR = A$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß auch die Produktmatrix L nur Einsen in der Hauptdiagonalen hat.

Dazu betrachten wir zwei untere Dreiecksmatrizen $L_1, L_2 \in K^{n \times n}$ mit $(L_1)_{ii} = (L_2)_{ii} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$ und: $\forall 1 \leq i < j \leq n : (L_1)_{ij} = (L_2)_{ij} = 0$.

Dann gilt für alle $1 \leq i \leq n$:

$$(L_1 L_2)_{ii} = \sum_{k=1}^n (L_1)_{ik} (L_2)_{ki} = \sum_{k=1}^{i-1} (L_1)_{ik} \underbrace{(L_2)_{ki}}_{=0 \text{ da } k < i} + \underbrace{(L_1)_{ii}}_{=1} \underbrace{(L_2)_{ii}}_{=1} + \sum_{k=i+1}^n \underbrace{(L_1)_{ik}}_{=0 \text{ da } i < k} (L_2)_{ki} = 0 + 1 \cdot 1 + 0 = 1$$

q.e.d.

Also ist induktiv L eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen in der Hauptdiagonalen und $A = LR$ wie gewünscht.

Zu Aufgabe 32:

Es sei $H := \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \mid w, z \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^{2 \times 2}$;

Ferner $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; dann gilt:

(a) $(H, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement und $(H \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

(b) $I^2 = J^2 = K^2 = -E$

(c) $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$, $JI = -K$, $KJ = -I$, $IK = -J$

(d) $\begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = \operatorname{Re}(w) \cdot E + \operatorname{Im}(w) \cdot I + \operatorname{Re}(z) \cdot J + \operatorname{Im}(z) \cdot K \quad (w, z \in \mathbb{C})$

Beweis zu (a):

Zu zeigen sind:

(i) $(H, +)$ ist Untergruppe von $(\mathbb{C}^{2 \times 2}, +)$

(ii) $\forall A, B \in H : A \cdot B \in H$

(iii) $E \in H \setminus \{0\}$

(iv) Alle $A \in H \setminus \{0\}$ besitzen ein Inverses in $H \setminus \{0\}$.

(v) $\forall A, B \in H \setminus \{0\} : A \cdot B \in H \setminus \{0\}$

Ad (i)

Mit Aufgabe (13) reicht es zu zeigen, daß $\forall A, B \in H : A - B \in H$.

Es sei also $A = \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix}$ (mit $w, z, u, v \in \mathbb{C}$) \implies

$$A - B = \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w - u & z - v \\ -\bar{z} + \bar{v} & \bar{w} - \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w - u & z - v \\ -\overline{z - v} & \overline{w - u} \end{pmatrix} \in H \quad \text{q.e.d.}$$

Dabei haben wir die Rechenregeln $\overline{x \pm y} = \bar{x} \pm \bar{y}$ für die komplexe Konjugation benutzt (Vorlesung (1.21)).

Ad (ii)

$$A = \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \implies A \cdot B = \begin{pmatrix} wu - z\bar{v} & wv + z\bar{u} \\ -\bar{z}u - \bar{w}\bar{v} & -\bar{z}v + \bar{w}\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wu - z\bar{v} & wv + z\bar{u} \\ -\overline{wv + z\bar{u}} & \overline{wu - z\bar{v}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \quad \text{mit } x = wu - z\bar{v} \wedge y = wv + z\bar{u}$$

Dabei haben wir die Rechenregeln $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$ und $\overline{\bar{x}} = x$ sowie $\overline{r\bar{x}} = r\bar{x}$ falls $r \in \mathbb{R}$ für die komplexe Konjugation benutzt (Vorlesung (1.21)).

Ad (iii)

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in H$$

Ad (iv)

Wir bestimmen zu $H \ni A = \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$ ein Inverses:

Sei $B = \begin{pmatrix} u & v \\ -\bar{v} & \bar{u} \end{pmatrix} \in H$; dann gilt wie in (ii) oben:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} wu - z\bar{v} & wv + z\bar{u} \\ -(wv + z\bar{u}) & wu - z\bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{lll} \text{(I)} & wu - z\bar{v} & = 1 \\ \text{(II)} & wv + z\bar{u} & = 0 \\ \text{(III)} & -(wv + z\bar{u}) & = 0 \\ \text{(IV)} & wu - z\bar{v} & = 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{(I)} & wu - z\bar{v} = 1 \\ \text{(II)} & wv + z\bar{u} = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Nach Vorlesung (1.21) gilt:

$$\begin{aligned} |w|^2 &= w\bar{w} = (\operatorname{Re}(w) + i \cdot \operatorname{Im}(w)) \cdot (\operatorname{Re}(w) - i \cdot \operatorname{Im}(w)) = (\operatorname{Re}(w))^2 + (\operatorname{Im}(w))^2 \in \mathbb{R}, \text{ insbesondere also:} \\ w = 0 &\iff \operatorname{Re}(w) = 0 = \operatorname{Im}(w) \xrightarrow[\operatorname{Re}(w), \operatorname{Im}(w) \in \mathbb{R}]{\text{da}} (\operatorname{Re}(w))^2 + (\operatorname{Im}(w))^2 = 0 \iff |w|^2 = w\bar{w} = 0. \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \bar{w} \cdot \text{(I)} &\implies \bar{w}wu - \bar{w}z\bar{v} = \bar{w} \implies |w|^2 u = \bar{w} + z\bar{w}\bar{v} \\ \bar{z} \cdot \text{(II)} &\implies \bar{z}wv + \bar{z}z\bar{u} = 0 \implies |z|^2 \bar{u} = -\bar{z}wv \implies |z|^2 u = -\overline{\bar{z}wv} = -z\bar{w}\bar{v} \quad (\text{da } r = \bar{r} \text{ f\"ur } r \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Addition der letzten beiden Gleichungen liefert:

$$|w|^2 u + |z|^2 u = \bar{w} + z\bar{w}\bar{v} - z\bar{w}\bar{v} = \bar{w}$$

Da aber $A = \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \neq 0 \iff w \neq 0 \text{ oder } z \neq 0$, folgt nach oben $|w|^2 > 0$ oder $|z|^2 > 0 \implies$

$$|w|^2 + |z|^2 > 0 \implies u = \frac{1}{|w|^2 + |z|^2} \bar{w}$$

Ebenso folgen via $\bar{z} \cdot \text{(I)}$ und $\bar{w} \cdot \text{(II)}$ die Gleichungen

$$\bar{z}wu - \bar{z}z\bar{v} = \bar{z} \implies |z|^2 \bar{v} = \bar{z}wu - \bar{z} \implies |z|^2 v = \overline{\bar{z}wu - \bar{z}} = z\bar{w}\bar{u} - z$$

$$\bar{w}wv + \bar{w}z\bar{u} = 0 \implies |w|^2 v = -z\bar{w}\bar{u}$$

also wieder mit Addition:

$$|z|^2 v + |w|^2 v = z\bar{w}\bar{u} - z\bar{w}\bar{u} - z \xrightarrow{\text{s.o.}} v = -\frac{1}{|w|^2 + |z|^2} z.$$

$$\text{Also } B = \frac{1}{|w|^2 + |z|^2} \begin{pmatrix} \bar{w} & -z \\ \bar{z} & w \end{pmatrix} = \frac{1}{|w|^2 + |z|^2} \begin{pmatrix} \bar{w} & -z \\ -(-z) & \bar{w} \end{pmatrix} \in H.$$

Verifikation:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{|w|^2 + |z|^2} \begin{pmatrix} \bar{w} & -z \\ \bar{z} & w \end{pmatrix} = \frac{1}{|w|^2 + |z|^2} \begin{pmatrix} w\bar{w} + z\bar{z} & w(-z) + z\bar{w} \\ -\bar{z}\bar{w} + \bar{w}\bar{z} & (-\bar{z})(-z) + \bar{w}w \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|w|^2 + |z|^2} \begin{pmatrix} |w|^2 + |z|^2 & 0 \\ 0 & |w|^2 + |z|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ad (v)

Dies folgt sofort aus (iv):

$$\text{Seien } A, B \in H \setminus \{0\}; \text{ falls } A \cdot B = 0 \xrightarrow[\text{invertierbar}]{A} B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot 0 = 0 \implies B = 0$$

Widerspruch !

Beweis zu (b):

$$I^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 + 0 & i \cdot 0 + 0 \cdot (-i) \\ 0 \cdot i + (-i) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-i)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) & 0 \\ 0 & (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

Beweis zu (c):

$$IJ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \cdot 0 + 0 \cdot (-1) & i \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + (-i) \cdot (-1) & 0 \cdot 1 + (-i) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = K$$

$$JK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + i & 0 + 0 \\ 0 + 0 & -i + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = I$$

$$KI = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 0 & 0 - i^2 \\ i^2 + 0 & 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

$$JI \stackrel{\text{s.o.}}{=}_{I=JK} J(JK) \stackrel{\text{assoz.}}{=} J^2 K \stackrel{(b)}{=}_{J^2=-E} -EK \stackrel{E}{\underset{\text{neutral}}{=}} -K$$

$$KJ \stackrel{\text{s.o.}}{=}_{J=KI} K(KI) = K^2 I \stackrel{(b)}{=}_{K^2=-E} -EI = -I$$

$$IK \stackrel{\text{s.o.}}{=}_{I=JK} (JK)K = JK^2 \stackrel{(b)}{=}_{K^2=-E} J(-E) = -JE = -J$$

Beweis zu (d):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) + i \cdot \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) \\ -(\operatorname{Re}(z) - i \cdot \operatorname{Im}(z)) & \operatorname{Re}(w) - i \cdot \operatorname{Im}(w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) + i \cdot \operatorname{Im}(w) & \operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) \\ -\operatorname{Re}(z) + i \cdot \operatorname{Im}(z) & \operatorname{Re}(w) - i \cdot \operatorname{Im}(w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(w) & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}(w) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \cdot \operatorname{Im}(w) & 0 \\ 0 & -i \cdot \operatorname{Im}(w) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Re}(z) \\ -\operatorname{Re}(z) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & i \cdot \operatorname{Im}(z) \\ i \cdot \operatorname{Im}(z) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Re}(w) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \operatorname{Im}(w) \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \operatorname{Re}(z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Im}(z) \cdot \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \operatorname{Re}(w) \cdot E + \operatorname{Im}(w) \cdot I + \operatorname{Re}(z) \cdot J + \operatorname{Im}(z) \cdot K \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$