

**Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker**

**Blatt 7**

**Zu Aufgabe 25:**

Sei  $K$  ein Körper. Dann gilt:

- (a)  $R, \tilde{R} \in K^{n \times n}$  obere Dreiecksmatrizen  $\implies R \cdot \tilde{R}$  obere Dreiecksmatrix
- (b)  $L \in K^{n \times n}$  untere Dreiecksmatrix  $\implies L^\top$  obere Dreiecksmatrix
- (c)  $L, \tilde{L} \in K^{n \times n}$  untere Dreiecksmatrizen  $\implies L \cdot \tilde{L}$  untere Dreiecksmatrix  
(wobei diese Aussage mit Hilfe von (a) und (b) bewiesen werden soll.)

**Beweis zu (a)**

Eine Matrix  $R = (R_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{n \times n}$  heißt obere Dreiecksmatrix, wenn für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gilt:  
 $R_{ij} = 0$  für  $i > j$ , d.h. wenn der Zeilenindex  $i$  des Eintrags  $R_{ij}$  größer ist als der Spaltenindex  $j$   
(also wenn unter der Hauptdiagonalen der Matrix  $R$  nur Nullen stehen.)

Entsprechend heißt  $L = (L_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{n \times n}$  eine untere Dreiecksmatrix, wenn für alle  $1 \leq i, j \leq n$  gilt:  
 $L_{ij} = 0$  für  $i < j$ , d.h. wenn der Zeilenindex  $i$  des Eintrags  $L_{ij}$  kleiner ist als der Spaltenindex  $j$   
(also oberhalb der Hauptdiagonalen der Matrix  $L$  nur Nullen stehen).

Seien nun  $R, \tilde{R}$  obere Dreiecksmatrizen. Zu zeigen ist also für die Produktmatrix

$$R \cdot \tilde{R} = \left( (R\tilde{R})_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in K^{n \times n} : \left[ \forall 1 \leq i, j \leq n : i > j \implies (R\tilde{R})_{ij} = 0 \right].$$

Es seien also  $1 \leq i, j \leq n$  mit  $i > j$ . Dann:

$$(R\tilde{R})_{ij} \stackrel{\text{Def.}}{=} \underset{\text{Matrixprodukt}}{\sum_{k=1}^n R_{ik} \cdot \tilde{R}_{kj}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} R_{ik} \cdot \tilde{R}_{kj}}_{=0} + \sum_{k=i}^n R_{ik} \cdot \tilde{R}_{kj} = \sum_{k=i}^n R_{ik} \cdot \tilde{R}_{kj}$$

(denn: man hat Informationen über die  $R_{ik}$  gerade für die Indizes mit  $i > k$ , da ja  $R$  obere Dreiecksmatrix ist, d.h. für  $i - 1 \geq k$ . Deshalb spaltet man die Summe auf in einen Teil, wo von  $k = 1$  bis  $k = i - 1 \iff 1 \leq k < i$  summiert wird, und die Restsumme von  $k = i$  bis  $k = n$ ).

Über die  $R_{ik}$  für  $k \geq i$  ist nichts bekannt; um weiter rechnen zu können, müssen wir also die Faktoren  $\tilde{R}_{kj}$  untersuchen:

Sei  $k \geq i$ ; da wir als Generalvoraussetzung haben, daß  $i > j$ , folgt  $k \geq i > j \implies k > j \implies (\tilde{R})_{kj} = 0$ : denn nun ist der Zeilenindex  $k$  von  $\tilde{R}_{kj}$  größer als sein Spaltenindex  $j$ , und damit ist

$\tilde{R}_{kj} = 0$ , da ja  $\tilde{R}$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Also sind in  $\sum_{k=i}^n R_{ik} \cdot \tilde{R}_{kj}$  alle Summanden gleich Null,

d.h es folgt

$$(R\tilde{R})_{ij} = \sum_{k=i}^n R_{ik} \cdot \underbrace{\tilde{R}_{kj}}_{=0} = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

### Beweis zu (b):

Wir beweisen (b) und

(b')  $R \in K^{n \times n}$  obere Dreiecksmatrix  $\implies R^\top$  untere Dreiecksmatrix

### Ad (b):

$L \in K^{n \times n}$  untere Dreiecksmatrix  $\xRightarrow{\text{Def.}} \forall 1 \leq i < j \leq n : L_{ij} = 0$

$$L^\top = \left( (L^\top)_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ mit } (L^\top)_{ij} \stackrel{\text{Def. Transposition}}{=} L_{ji}.$$

$$\text{Zu zeigen ist: } \left[ \forall 1 \leq i, j \leq n : i > j \implies (L^\top)_{ij} = 0 \right]$$

Sei also  $1 \leq i, j \leq n$  und  $i > j \implies$  in  $L_{ji}$  ist der Zeilenindex  $j$  kleiner als der Spaltenindex  $i$ , d.h. mit  $L$  untere Dreiecksmatrix ist  $L_{ji} = 0 \xRightarrow{\text{s. o.}} (L^\top)_{ij} = L_{ji} = 0$  für  $i > j \xRightarrow{\text{Def.}} L$  ist obere Dreiecksmatrix q.e.d.

### Ad (b'):

$R \in K^{n \times n}$  obere Dreiecksmatrix  $\xRightarrow{\text{Def.}} \forall 1 \leq j < i \leq n : R_{ij} = 0$

$$R^\top = \left( (R^\top)_{ij} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ mit } (R^\top)_{ij} \stackrel{\text{Def. Transposition}}{=} R_{ji}.$$

$$\text{Zu zeigen ist: } \left[ \forall 1 \leq i, j \leq n : i < j \implies (R^\top)_{ij} = 0 \right]$$

Sei also  $1 \leq i, j \leq n$  und  $i < j \implies$  in  $R_{ji}$  ist der Zeilenindex  $j$  größer als der Spaltenindex  $i$ , d.h. mit  $R$  obere Dreiecksmatrix ist  $R_{ji} = 0 \xRightarrow{\text{s. o.}} (R^\top)_{ij} = R_{ji} = 0$  für  $i < j \xRightarrow{\text{Def.}} R$  ist untere Dreiecksmatrix q.e.d.

### Beweis zu (c):

Es seien  $L, \tilde{L}$  untere Dreiecksmatrizen. Dann gilt:

$$(L \cdot \tilde{L})^\top \stackrel{\text{Vorl. (2.12)(d)}}{=} (\tilde{L})^\top \cdot L^\top$$

Nun sind  $L, \tilde{L}$  untere Dreiecksmatrizen, mit Teil (b) also  $L^\top, (\tilde{L})^\top$  obere Dreiecksmatrizen. Nach Teil (a) ist aber das Produkt oberer Dreiecksmatrizen wieder eine obere Dreiecksmatrix, weshalb auch  $(\tilde{L})^\top \cdot L^\top = (L \cdot \tilde{L})^\top$  eine obere Dreiecksmatrix ist. Mit Teil (b') gilt aber:

$$(L \cdot \tilde{L})^\top \text{ obere Dreiecksmatrix } \implies \left[ (L \cdot \tilde{L})^\top \right]^\top \stackrel{\text{Vorl. (2.12)(a)}}{=} L \cdot \tilde{L} \text{ untere Dreiecksmatrix } \quad \text{q.e.d.}$$

### Zu Aufgabe 26:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \implies \forall n \in \mathbb{N} : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Erster Beweis:** Induktion nach  $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Induktionsanfang } n = 1 : A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1(1-1)}{2} & \frac{1(1-1)(1-2)}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1(1-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Induktionsschritt  $n \mapsto n + 1$  :

$$\text{Induktionsvoraussetzung: Für ein } n \in \mathbb{N} \text{ sei die Aussage } A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ wahr.}$$

Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned} A^{n+1} &\stackrel{\text{Def.}}{=} A^n \cdot A \\ &\stackrel{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left( \underbrace{1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{1. Spalte des Produkts}} \underbrace{+ 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{2. Spalte des Produkts}} \underbrace{+ 1 \cdot \begin{pmatrix} n \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{3. Spalte des Produkts}} \underbrace{+ 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)}{2} \\ \frac{n(n-1)}{2} \\ n \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{4. Spalte des Produkts}} \right) \end{aligned}$$

Dabei wurde verwendet, daß für Matrizen  $X \in K^{m \times n}$  und  $U = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r) \in K^{n \times r}$  mit den Spalten  $u_1, u_2, \dots, u_r \in K^{n \times 1}$  sich das Matrixprodukt berechnet zu  $X \cdot U = (X \cdot u_1 \ X \cdot u_2 \ \dots \ X \cdot u_r)$ , d.h. man erhält die  $j$ -te Spalte der Produktmatrix durch  $X \cdot u_j \in K^{m \times 1}$  ( $1 \leq j \leq r$ ).

Ferner gilt für die Matrix  $X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \in K^{m \times n}$  (mit den Spalten  $x_j \in K^{m \times 1}$ ) und eine Spalte

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} : X \cdot \alpha = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot x_j$$

So erklärt sich zum Beispiel die 4. Spalte im obigen Produkt  $A^n \cdot A$  :

$$\text{4. Spalte von } A^n \cdot A = A^n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (\text{3. Spalte von } A^n) + 1 \cdot (\text{4. Spalte von } A^n) = 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)}{2} \\ n \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ \frac{n(n-1)}{2} \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n + \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n+1 & n + \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{2n+n(n-1)}{2} & \frac{3n(n-1)+n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n+1 & \frac{2n+n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(2+(n-1))}{2} & \frac{n(n-1)}{6} \cdot (3 + (n-2)) \\ 0 & 1 & n+1 & \frac{n(2+(n-1))}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n-1)}{6} (n+1) \\ 0 & 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} & \frac{(n+1)((n+1)-1)((n+1)-2)}{6} \\ 0 & 1 & n+1 & \frac{(n+1)((n+1)-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

### Zweiter Beweis :

Es ist

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= E_4} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=: H}$$

mit  $E_4$  die Einheitsmatrix (neutrales Element in  $\mathbb{R}^{4 \times 4}$  bezüglich der Matrixmultiplikation).

Insbesondere folgt dann:

$$\forall n \in \mathbb{N} : A^n = (E_4 + H)^n$$

Da das Matrixprodukt nicht kommutativ ist, kann man den Binomischen Lehrsatz auf Matrizen für gewöhnlich nicht anwenden; sind aber in  $(C + D)^n$  die Matrizen  $C, D$  vertauschbar bezüglich des Produkts, d.h. gilt  $C \cdot D = D \cdot C$ , so kann man diesen Satz auch für Matrizen verwenden.

Hier ist nun  $E_4$  neutral bezüglich des Produkts, d.h. es ist  $E_4 \cdot H = H = H \cdot E_4$ , also kann man schreiben:

$$\begin{aligned}
A^n &= (E_4 + H)^n = (H + E_4)^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot H^k \cdot \underbrace{E_4^{n-k}}_{= E_4} \\
&\stackrel{\substack{E_4 \\ \text{neutral}}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H^k
\end{aligned}$$

Untersuchen wir also die Potenzen von  $H$ . Es ist

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(man verwende das Verfahren aus dem ersten Beweis). Dann folgt

$$H^3 = H^2 \cdot H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(erhält man auf die gleiche Weise), und damit

$$H^4 = H^3 \cdot H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{das Nullelement in } (\mathbb{R}^{4 \times 4}, +)).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H^k \\ &\stackrel{\substack{H^k=0 \\ \text{für } k \geq 4}}{=} \sum_{k=0}^3 \binom{n}{k} H^k \\ &= \underbrace{\binom{n}{0}}_1 \cdot H^0 + \underbrace{\binom{n}{1}}_n \cdot H^1 + \underbrace{\binom{n}{2}}_{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot H^2 + \underbrace{\binom{n}{3}}_{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \cdot H^3 \\ &\stackrel{\substack{\text{siehe} \\ \text{Rechnung} \\ \text{oben}}}{=} E_4 + n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\ 0 & 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

### Zu Aufgabe 27:

Es sei  $K$  ein Körper. Für  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in K^{n \times n}$  sei  $\text{spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \in K$

die Spur der Matrix  $A$ . Dann gilt:

- (a)  $A, B \in K^{n \times n} \implies \text{spur}(AB) = \text{spur}(BA)$
- (b)  $A, B, C \in K^{n \times n} \implies \text{spur}(ABC) = \text{spur}(BCA) = \text{spur}(CAB)$
- (c) Falls  $\mathbb{N} \ni n \geq 2$  gibt es  $A, B, C \in K^{n \times n}$  mit  $\text{spur}(ABC) \neq \text{spur}(BAC)$ .

### Beweis von (a):

$$\begin{aligned} \text{spur}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{ii} \\ &\stackrel{\substack{\text{Def.} \\ \text{Matrixprodukt}}}{=} \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n A_{ik} \cdot B_{ki} \right) \\ &= \sum_{s=1}^n \left( \sum_{t=1}^n A_{st} \cdot B_{ts} \right) \quad (\text{Indexumbenennung : } i \text{ durch } s, k \text{ durch } t \text{ ersetzt}) \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=1}^n A_{kj} \cdot B_{jk} \right) \quad (\text{Indexumbenennung : } s \text{ durch } k, t \text{ durch } j \text{ ersetzt}) \\ &\stackrel{\substack{\text{Distributiv-} \\ \text{gesetz}}}{=} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n A_{kj} \cdot B_{jk} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n B_{jk} \cdot A_{kj} \right) \\ &\stackrel{\substack{\text{Def.} \\ \text{Matrixprodukt}}}{=} \sum_{j=1}^n (BA)_{jj} \\ &\stackrel{\substack{\text{Def.} \\ \text{spur}}}{=} \text{spur}(BA) \end{aligned}$$

Die obigen beiden Indexumbenennungen hätte man auch in einem Schritt ausführen, d.h. gleich  $i$  durch  $k$  und  $k$  durch  $i$  ersetzen können. Dann muß man auch die Funktion dieser Indizes im Ausdruck, über den summiert wird, vertauschen, d.h.  $C_{ik}$  muß in  $C_{ki}$  übergehen. Die Einführung des Zwischenschrittes mit den Indizes  $s, t$  geschieht nur der Verdeutlichung halber.

### Beweis von (b):

Es seien nun  $A, B, C \in K^{n \times n}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{spur}(ABC) &\stackrel{\text{Assoz.}}{=} \text{spur}((AB) \cdot C) \\ &\stackrel{\substack{\text{Teil} \\ (a)}}{=} \text{spur}(C \cdot (AB)) = \text{spur}(CAB) \\ &\stackrel{\text{Assoz.}}{=} \text{spur}((CA) \cdot B) \\ &\stackrel{\substack{\text{Teil} \\ (a)}}{=} \text{spur}(B \cdot (CA)) = \text{spur}(BCA) \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

**Beweis von (c):**

Wähle  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Dann ist:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{spur}(ABC) = 1$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (BA) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{spur}(BAC) = 0$$

Also gilt für diese Matrizen  $\text{spur}(ABC) = 1 \neq 0 = \text{spur}(BAC)$  q.e.d.

Um ein Beispiel für beliebiges  $n \geq 2$  zu erhalten, fülle man die obigen Matrizen einfach durch Nullen zu Matrizen aus  $K^{n \times n}$  auf:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist wie eben

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB) \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{spur}(ABC) = 1$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (BA) \cdot C = 0 \cdot C = 0 \Rightarrow \text{spur}(BAC) = 0$$

Also gilt auch hier  $\text{spur}(ABC) = 1 \neq 0 = \text{spur}(BAC)$  q.e.d.

### Zu Aufgabe 28:

Sei  $K$  ein Körper,  $A \in K^{n \times n}$  invertierbar,  $a, b \in K^n$  mit  $1 + b^\top A^{-1} a \neq 0$ .  
Dann ist  $A + ab^\top$  invertierbar und es gilt:

$$(A + ab^\top)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \cdot A^{-1} ab^\top A^{-1}$$

### Beweis:

Zunächst untersuchen wir, ob die angegebenen Summen und Produkte der Matrizen wohldefiniert sind:

$b^\top \in K^{1 \times n} \wedge K^{n \times n} \ni A^{-1} \implies b^\top \cdot A^{-1} \in K^{1 \times n}$  ist wohldefiniert;

$b^\top \cdot A^{-1} \in K^{1 \times n} \wedge K^{n \times 1} \ni a \implies (b^\top A^{-1}) \cdot a \in K^{1 \times 1}$  ist wohldefiniert und ein Element des Körpers  $K$ ; damit ist auch der Ausdruck  $1 + b^\top A^{-1} a$  als Summe in  $K$  sinnvoll.

$a \in K^{n \times 1} \wedge K^{1 \times n} \ni b^\top \implies a \cdot b^\top \in K^{n \times n}$  ist wohldefiniert; da auch  $A \in K^{n \times n}$  ist damit auch die Summe  $A + ab^\top$  sinnvoll.

Ferner sind die Matrizen  $A^{-1}, ab^\top \in K^{n \times n} \implies A^{-1} ab^\top A^{-1} \in K^{n \times n}$  wohldefiniert und damit auch die Summe  $A^{-1} - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \cdot A^{-1} ab^\top A^{-1}$ .

Um nun die Behauptung zu beweisen, müssen wir zeigen, daß  $A^{-1} - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \cdot A^{-1} ab^\top A^{-1}$  die inverse Matrix zu  $A + ab^\top$  ist. Nach Vorlesung (2.13) ist die inverse Matrix  $Y \in K^{n \times n}$  zu einer Matrix  $X \in K^{n \times n}$  definiert durch die Bedingung  $X \cdot Y = Y \cdot X = E_n$  ( $E_n$  die Einheitsmatrix, das neutrale Element in  $K^{n \times n}$  bezüglich der Multiplikation). Ferner ist nach Vorlesung (2.13)  $Y$  durch  $X$  und obige Bedingung eindeutig bestimmt. Wir müssen also nachweisen:

$$(A + ab^\top) \cdot \left( A^{-1} - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \cdot A^{-1} ab^\top A^{-1} \right) = E_n = \left( A^{-1} - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \cdot A^{-1} ab^\top A^{-1} \right) \cdot (A + ab^\top)$$

Dies folgt so:

$$\begin{aligned} & \left( A^{-1} - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \cdot A^{-1} ab^\top A^{-1} \right) \cdot (A + ab^\top) = \\ & \stackrel{\text{Distrib.}}{\stackrel{\text{gesetz}}{=}} \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{= E_n} + A^{-1} ab^\top - \left( \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) (A^{-1} ab^\top A^{-1}) A - \left( \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) (A^{-1} ab^\top A^{-1}) ab^\top \\ & \stackrel{\text{Assoz.}}{=} E_n + A^{-1} ab^\top - \left( \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) (A^{-1} ab^\top) \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{= E_n} - \left( \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) (A^{-1} a) \underbrace{(b^\top A^{-1} a)}_{\substack{\in K \\ \text{(vorziehen)}}} b^\top \\ & \stackrel{\text{Vorl.}}{\stackrel{(2.12)(c)}{=}} E_n + A^{-1} \cdot ab^\top - \left( \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) (A^{-1} ab^\top) - \left( \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) (b^\top A^{-1} a) \cdot (A^{-1} a) b^\top \\ & \stackrel{\text{Assoz.}}{=} E_n + A^{-1} ab^\top - \left( \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) \cdot (A^{-1} ab^\top) - \left( \frac{b^\top A^{-1} a}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) \cdot (A^{-1} a b^\top) \\ & \stackrel{\text{Vorl.}}{\stackrel{(2.12)(c)}{=}} E_n + \left( 1 - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} - \frac{b^\top A^{-1} a}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) \cdot (A^{-1} ab^\top) \\ & \stackrel{\text{gemeins.}}{\stackrel{\text{Nenner}}{=}} E_n + \underbrace{\left( 1 - \frac{1 + b^\top A^{-1} a}{1 + b^\top A^{-1} a} \right)}_{= 0} \cdot A^{-1} ab^\top \\ & = E_n \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$



Andersherum gilt:

$$\begin{aligned}
& (A + ab^\top) \cdot \left( A^{-1} - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \cdot A^{-1} ab^\top A^{-1} \right) = \\
& \stackrel{\text{Distrib.}}{=} \stackrel{\text{gesetz}}{=} \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{= E_n} + A \cdot \underbrace{\left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right)}_{\substack{\in K \\ \text{vorziehen}}} A^{-1} ab^\top A^{-1} + ab^\top \cdot A^{-1} + ab^\top \cdot \underbrace{\left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right)}_{\substack{\in K \\ \text{vorziehen}}} A^{-1} ab^\top A^{-1} \\
& \stackrel{\text{Vorl.}}{=} \stackrel{(2.12)(c)}{=} E_n + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) \underbrace{A \cdot A^{-1}}_{= E_n} \cdot ab^\top A^{-1} + (ab^\top) A^{-1} + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) \underbrace{(ab^\top) (A^{-1} ab^\top A^{-1})}_{\stackrel{\text{Ass.}}{=} a(b^\top A^{-1} a)b^\top A^{-1}} \\
& = E_n + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) ab^\top A^{-1} + ab^\top A^{-1} + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) a \underbrace{(b^\top A^{-1} a)}_{\substack{\in K \\ \text{vorziehen}}} b^\top A^{-1} \\
& \stackrel{\text{Vorl.}}{=} \stackrel{(2.12)(c)}{=} E_n + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) ab^\top A^{-1} + ab^\top A^{-1} + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) (b^\top A^{-1} a) ab^\top A^{-1} \\
& = E_n + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) ab^\top A^{-1} + ab^\top A^{-1} + \left( -\frac{b^\top A^{-1} a}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) ab^\top A^{-1} \\
& \stackrel{\text{Vorl.}}{=} \stackrel{(2.12)(c)}{=} E_n + \left( -\frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} + 1 - \frac{b^\top A^{-1} a}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) \cdot ab^\top A^{-1} \\
& = E_n + \left( 1 - \frac{1}{1 + b^\top A^{-1} a} - \frac{b^\top A^{-1} a}{1 + b^\top A^{-1} a} \right) \cdot ab^\top A^{-1} \\
& \stackrel{\text{gemeins.}}{=} \stackrel{\text{Nenner}}{=} E_n + \underbrace{\left( 1 - \frac{1 + b^\top A^{-1} a}{1 + b^\top A^{-1} a} \right)}_{= 0} \cdot ab^\top A^{-1} \\
& = E_n \quad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$