

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 2

Zu Aufgabe 5:

a) Zu zeigen ist für $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$:

$$m|a \wedge m|b \implies m|(\alpha \cdot a + \beta \cdot b).$$

Seien dazu $m \in \mathbb{N}, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ vorgegeben und es gelte $m|a$ und $m|b$.
Dann folgt nach Definition von "teilt":

$\exists k \in \mathbb{Z} : m \cdot k = a \wedge \exists l \in \mathbb{Z} : m \cdot l = b$. Dann aber:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot a + \beta \cdot b &= \alpha \cdot (m \cdot k) + \beta \cdot (m \cdot l) \stackrel{\substack{\text{Distrib.} \\ + \text{ komm.} \\ + \text{ assoz.}}}{=} m \cdot (\underbrace{\alpha \cdot k + \beta \cdot l}_{=: q \in \mathbb{Z}}) \implies \\ \implies \exists q \in \mathbb{Z} : m \cdot q &= \alpha \cdot a + \beta \cdot b \stackrel{\text{Def.}}{\implies} m|(\alpha \cdot a + \beta \cdot b) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

b) Zu zeigen ist für festes $m \in \mathbb{Z}$ durch vollständige Induktion:

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z} \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z} : m|a_1 \wedge m|a_2 \wedge \dots \wedge m|a_k \implies m|(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k)$$

Induktionsanfang : $k = 1$

$$\begin{aligned} m|a_1 &\stackrel{\text{Def.}}{\implies} \exists k_1 \in \mathbb{Z} : m \cdot k_1 = a_1 \implies \alpha_1 \cdot a_1 = \alpha_1 \cdot (m \cdot k_1) = m \cdot (\underbrace{\alpha_1 k_1}_{=: q_1 \in \mathbb{Z}}) \implies \\ \implies \exists q_1 \in \mathbb{Z} : m \cdot q_1 &= \alpha_1 a_1 \stackrel{[Def.]}{\implies} m|\alpha_1 a_1. \end{aligned}$$

Induktionsschritt $k \mapsto k + 1$:

Induktionsvoraussetzung: Für ein $k \in \mathbb{N}$ gelte:

$$\forall a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z} \forall \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{Z} : m|a_1 \wedge m|a_2 \wedge \dots \wedge m|a_k \implies m|(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k)$$

Induktionsbehauptung: Für beliebige $a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_{k+1} \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$m|a_1 \wedge \dots \wedge m|a_k \wedge m|a_{k+1} \implies m|(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1})$$

Induktionsbeweis:

Es gelte nun für $a_1, \dots, a_{k+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{k+1} \in \mathbb{Z} : m|a_1 \wedge \dots \wedge m|a_k \wedge m|a_{k+1} \implies$

$$\left. \begin{aligned} m|a_1 \wedge \dots \wedge m|a_k &\stackrel{\text{IV}}{\implies} m|(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) \\ m|a_{k+1} &\end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Teil a) mit} \\ \beta_1 := 1 \wedge \beta_2 := \alpha_{k+1} \end{array}$$

$$m|(\beta_1(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k) + \beta_2 a_{k+1}) = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} \quad \text{q.e.d.}$$

Zu Aufgabe 6:

a) Zu zeigen ist für Mengen A, B , daß durch

$$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\} \quad (a \in A, b \in B)$$

ein Paar definiert wird, d.h. daß gilt:

$$\forall a, a' \in A \forall b, b' \in B : (a, b) = (a', b') \implies a = a' \wedge b = b'.$$

Beweis:

Es seien $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ mit $(a, b) = (a', b')$. Zu zeigen ist also: $a = a' \wedge b = b'$.

Nach Definition ist

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\} \\ (a', b') = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} \end{array} \right\} \implies \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} \quad (\star)$$

Nach der Definition der Mengengleichheit in VL 0.4a) gilt also

$$\{a\} \in \{\{a'\}, \{a', b'\}\} \implies \{a\} = \{a'\} \text{ oder } \{a\} = \{a', b'\}.$$

Es ergeben sich somit 2 Fälle:

Falls $\{a\} = \{a'\}$ folgt $a \in \{a\} = \{a'\} \implies a = a'$.

Nach (\star) gilt auch

$$\{a, b\} \in \{\{a'\}, \{a', b'\}\} \xRightarrow{a=a'} \{a, b\} = \{a'\} = \{a\} \text{ oder } \{a, b\} = \{a', b'\} = \{a, b'\} \quad (\star\star).$$

falls $\{a, b\} = \{a\}$ folgt $b \in \{a, b\} = \{a\}$, d.h. $b = a$, zusammen mit $a = a'$ dann mit (\star) :

$$\begin{aligned} \{\{a\}, \{a, b\}\} &= \{\{a\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = \{\{a\}, \{a, b'\}\} \implies \{a, b'\} = \{a\} \implies \\ &\implies b' \in \{a\} \implies b' = a, \text{ d.h. mit } a = b \text{ auch } b' = b. \end{aligned}$$

$$\text{Also: } a = a' \wedge b = b' \quad \text{q.e.d.}$$

falls $\{a, b\} \neq \{a\}$ ist $b \neq a$ und wegen $(\star\star)$: $\{a, b\} = \{a, b'\} \implies b \in \{a, b'\} \implies$

$$\implies b = a \vee b = b' \xRightarrow{b \neq a} b = b'.$$

$$\text{Also auch in diesem Falle: } a = a' \wedge b = b' \quad \text{q.e.d.}$$

Falls $\{a\} = \{a', b'\}$ folgt $a' \in \{a', b'\} = \{a\} \wedge b' \in \{a', b'\} = \{a\} \implies a' = a \wedge b' = a \implies a' = a = b'$,

ferner wieder mit (\star) : $\{a, b\} \in \{\{a'\}, \{a', b'\}\} = \{\{a\}\} \implies b \in \{a, b\} = \{a\} \implies b = a$.

Damit also $b' = a' = a = b$, also wieder $a = a'$ und $b = b'$, was zu zeigen war.

Alternativer Beweis:

Dazu zwei Vorbemerkungen:

(♣) Für beliebige Aussagen \mathcal{A}, \mathcal{B} und \mathcal{C} ist allgemeingültig (d.h. eine Tautologie):

$$[\mathcal{A} \implies \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}] \iff [(\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \implies \mathcal{C})]$$

denn:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A} \implies \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}] &\xLeftrightarrow[\text{Aufgabe 1}] \neg \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \xLeftrightarrow[\text{Morgan}]{\text{de}} (\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \\ &\xLeftrightarrow[\text{Aufgabe 1}] (\mathcal{A} \implies \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \implies \mathcal{C}) \end{aligned}$$

(♣♣) Zum Widerspruchsbeweis:

Man kann eine Aussage $\mathcal{A} \implies \mathcal{B}$ direkt beweisen, d.h. aus der Gültigkeit von \mathcal{A} die Gültigkeit von \mathcal{B} herleiten, oder aber den Beweis durch Widerspruch führen:

Aufgrund der Allgemeingültigkeit von $\mathcal{D} \vee \neg \mathcal{D}$ für jede Aussage \mathcal{D} gilt insbesondere für die Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$:

$[\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}] \vee \neg[\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}]$ (\star) ist allgemeingültig.

Man kann also die Richtigkeit von $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ nachweisen, indem man zeigt, daß $\neg[\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}]$ falsch ist (denn dann folgt aus (\star) : $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ muß wahr sein).

Nun gilt mit Aufgabe 1 die Tautologie $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \iff (\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, also ist $\neg(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$ logisch äquivalent mit $\neg(\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, was nach den de-Morganschen Regeln wiederum logisch äquivalent ist zu $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$. Gelingt es also nachzuweisen, daß $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$ falsch ist, so muß $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr sein. Das ist das Prinzip des Widerspruchsbeweises:

Um $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zu beweisen, zeigt man, daß $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$ falsch ist, und das ist gezeigt, wenn man aus $\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$ einen Widerspruch herleiten kann: Nur aus etwas Falschem kann etwas Falsches folgen.

Wegen der Wichtigkeit dieses Beweisprinzips wollen wir es nun auch formal nachweisen, d.h. wir zeigen für Aussagen \mathcal{A}, \mathcal{B} :

$$[\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}] \iff [\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B} \Rightarrow f]$$

(wobei „f“ wieder für „falsch“ steht) anhand der Wahrheitstafel :

\mathcal{A}	\mathcal{B}	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\neg \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \neg \mathcal{B} \Rightarrow f$	\iff
w	w	<u>w</u>	f	f	<u>w</u>	w
w	f	<u>f</u>	w	w	<u>f</u>	w
f	w	<u>w</u>	f	f	<u>w</u>	w
f	f	<u>w</u>	w	f	<u>w</u>	w

Damit beweisen wir nun die Aussage (a):

Für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ gelte $(a, a') = (b, b')$ und zugleich $a \neq a'$, d.h.

$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\} \wedge a \neq a' \implies \{a\} \neq \{a'\}$. Also folgt aus $\{a\} \in \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, daß $\{a\} = \{a', b'\}$ gelten muß, also $a' \in \{a', b'\} = \{a\} \implies a' = a$ und das ist ein Widerspruch zu $a \neq a'$.

Nach (\clubsuit) und ($\clubsuit\clubsuit$) haben wir damit $(a, b) = (a', b') \implies a = a'$ bewiesen. Nun folgern wir noch $b = b'$:

Weil nun $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, b'\}\}$ (da $a = a'$), gilt

falls $a = b$: $\{\{a\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, b'\}\} \implies \{a, b'\} = \{a\} \implies b' \in \{a\} \implies b' = a = b \implies a = a' \wedge b = b'$ q.e.d.

falls $a \neq b$ $\implies \{a, b\} \neq \{a\}$; damit: $\{a, b\} \in \{\{a\}, \{a, b'\}\} \implies \{a, b\} = \{a, b'\} \implies b \in \{a, b'\} \wedge b \neq a \implies b = b'$ q.e.d.

b) Mit der Paardefinition aus Teil (a) soll gelten:

$$A \times B \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \quad (\text{für beliebige Mengen } A, B)$$

Beweis:

Nach Definition 0.4 (b) ist zu zeigen: $\forall \xi \in A \times B : \xi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

Sei also $\xi \in A \times B$, d.h. $\exists a \in A \exists b \in B : \xi = (a, b) \stackrel{\text{Def.}}{=} \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Nun gilt: $a \in A \subset A \cup B \implies a \in A \cup B \implies \{a\} \subset A \cup B \stackrel{\text{Def.}}{\implies} \{a\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$,
Potenzmenge

und mit $a, b \in A \cup B$ ist $\{a, b\} \subset A \cup B \stackrel{\text{dito}}{\implies} \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

Also folgt $\xi = \{\{a\}, \{a, b\}\} \subset \mathcal{P}(A \cup B) \stackrel{\text{dito}}{\implies} \xi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ q.e.d.

Zu Aufgabe 7:

a) Für Mengen A, B, C, D ist zu zeigen:

$$(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subset (A \times B) \setminus (C \times D) \quad (\star\star)$$

Beweis:

Zunächst zeigen wir den Hinweis, nämlich die Allgemeingültigkeit der Aussage

$\neg(C \vee D) \implies \neg(C \wedge D)$ für beliebige Aussage C und D : .

$$\begin{aligned} [\neg(C \vee D) \implies \neg(C \wedge D)] &\stackrel{\text{Aufgabe 1}}{\iff} [\underbrace{\neg(\neg(C \vee D))}_{\iff C \vee D} \vee \neg(C \wedge D)] \stackrel{\text{de Morgan}}{\iff} C \vee D \vee (\neg C \vee \neg D) \\ &\stackrel{\text{Assoz.}}{\iff} \underbrace{(C \vee \neg C)}_w \vee \underbrace{(D \vee \neg D)}_w \iff w \end{aligned}$$

(wobei „w“ für „wahr“ steht).

Ferner gilt:

$$[C \implies D] \implies [\mathcal{E} \wedge C \implies \mathcal{E} \wedge D] \quad (\mathcal{E} \text{ eine Aussage}) \quad (\star)$$

(denn: Wegen „ex falso quodlibet“ ist nur der Fall „ $C \implies D$ wahr“ zu untersuchen, d.h. „ $\mathcal{E} \wedge C \implies \mathcal{E} \wedge D$ wahr“ nachzuweisen. Das ist klar, wenn „ $\mathcal{E} \wedge C$ “ falsch ist; sei also „ $\mathcal{E} \wedge C$ “ wahr, also \mathcal{E} wahr und C wahr. Weil „ $C \implies D$ “ gilt, ist damit D wahr, d.h. „ $\mathcal{E} \wedge D$ “ wahr, und weil „ $\mathcal{E} \wedge C$ “ wahr ist, ist damit auch „ $\mathcal{E} \wedge C \implies \mathcal{E} \wedge D$ “ wahr q.e.d.)

Nun beweisen wir Aussage (a), wieder mit Satz 0.4 b) :

$$\begin{aligned} \forall x, y : (x, y) \in (A \setminus C) \times (B \setminus D) &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} x \in (A \setminus C) \wedge y \in (B \setminus D) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} (x \in A \wedge \neg(x \in C)) \wedge (y \in B \wedge \neg(y \in D)) \\ &\stackrel{\text{Differenz}}{\iff} (x \in A \wedge y \in B) \wedge (\neg(x \in C) \wedge \neg(y \in D)) \\ &\stackrel{\text{Assoz.}}{\iff} (x \in A \wedge y \in B) \wedge (\neg(x \in C) \wedge \neg(y \in D)) \\ &\stackrel{\text{Komm.}}{\iff} (x \in A \wedge y \in B) \wedge (\neg(x \in C) \wedge \neg(y \in D)) \\ &\stackrel{\text{de Morgan}}{\iff} (x \in A \wedge y \in B) \wedge \neg(x \in C \vee y \in D) \\ \blacksquare &\stackrel{\text{Hinweis}}{\implies} (x \in A \wedge y \in B) \wedge \neg(x \in C \wedge y \in D) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{\iff} ((x, y) \in A \times B) \wedge \neg((x, y) \in C \times D) \\ &\stackrel{\text{Differenz}}{\iff} (x, y) \in (A \times B) \setminus (C \times D) \end{aligned}$$

b) Es ist zu zeigen, daß in $(A \setminus C) \times (B \setminus D) \subset (A \times B) \setminus (C \times D)$ nicht Gleichheit gilt. Untersuchen wir den Beweis in Teil (a), so erkennen wir, daß überall Äquivalenzumformungen auftreten bis auf die mit (■) markierte Stelle. Wir brauchen also Elemente $(x, y) \in A \times B$ mit $(x, y) \notin C \times D$, aber $x \in C$ oder $y \in D$. Wähle also zum Beispiel

$$A = B = \mathbb{N} \wedge C = \{1\} \wedge D = \{2\}$$

Wählen wir nun $(x, y) = (1, 3) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so folgt mit $y = 3 \notin D$, daß $(1, 3) \notin C \times D \implies$

$(1, 3) \in (A \times B) \setminus (C \times D)$. Andererseits ist $x = 1 \notin \mathbb{N} \setminus \{1\} = A \setminus C$, also:

$(x, y) = (1, 3) \notin (A \setminus C) \times (B \setminus D)$, d.h. die rechte Seite von $(\star\star)$ ist nicht in der linken Seite enthalten. q.e.d.

Zu Aufgabe 8:

a) Auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ wird durch

$$(a, b) \sim (c, d) : \iff a + d = b + c \quad (a, b, c, d \in \mathbb{N}_0)$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Beweis:

Die zugrundeliegende Teilmenge R von $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \times (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$ ist

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \times (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \mid a + d = b + c\} \subset (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \times (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0).$$

Wir beweisen die definierenden Eigenschaften:

• **reflexiv:**

$$\forall a, b \in \mathbb{N}_0 : (a, b) \sim (a, b) \xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} a + b = b + a \text{ (wahr: die Addition in } \mathbb{Z} \text{ ist kommutativ).}$$

• **symmetrisch:**

$$\begin{aligned} \forall a, b, c, d \in \mathbb{N}_0 : (a, b) \sim (c, d) &\xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} a + d = b + c \xrightarrow[\text{in } \mathbb{Z}]{\text{Kom.}} c + b = d + a \\ &\xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} (c, d) \sim (a, b). \end{aligned}$$

• **transitiv:** $\forall a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}_0 :$

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} (a, b) \sim (c, d) \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} a + d = b + c \\ (c, d) \sim (e, f) \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} c + f = d + e \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Addition}} (a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e) \\ \xrightarrow[\text{in } \mathbb{Z}]{\text{Komm/Ass}} (a + f) + (d + c) = (b + e) + (d + c) \xrightarrow[\text{in } \mathbb{N}_0]{\text{Kürzen}} a + f = b + e \xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} (a, b) \sim (e, f) \end{aligned}$$

q.e.d.

b) Für die Äquivalenzklassen der Relation aus Teil (a) gilt.

$$\begin{aligned} [(a, b)] &= [(a - b, 0)] & (a \geq b, a, b \in \mathbb{N}_0) \\ [(a, b)] &= [(0, b - a)] & (a \leq b, a, b \in \mathbb{N}_0) \end{aligned}$$

Beweis:

$$\textbf{falls } a \geq b \implies a - b \geq 0 : a + 0 = a = b + \underbrace{(a - b)}_{\in \mathbb{N}_0} \xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} (a, b) \sim (a - b, 0) \quad (\clubsuit)$$

Also gilt für alle $c, d \in \mathbb{N}_0 :$

Ad $[(a, b)] \subset [(a - b, 0)] :$

$$(c, d) \in [(a, b)] \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} (c, d) \sim (a, b) \xrightarrow[\text{transitiv}]{(\clubsuit)} (c, d) \sim (a - b, 0) \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} (c, d) \in [(a - b, 0)]$$

Ad $[(a - b, 0)] \subset [(a, b)] :$

$$(c, d) \in [(a - b, 0)] \xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} (c, d) \sim (a - b, 0) \xrightarrow[\text{symm. transitiv}]{(\clubsuit)} (c, d) \sim (a, b) \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} (c, d) \in [(a, b)]$$

$$\textbf{falls } a \leq b \implies b - a \geq 0 : a + \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{N}_0} = b = b + 0 \xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} (a, b) \sim (0, b - a) \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

Also gilt für alle $c, d \in \mathbb{N}_0 :$

Ad $[(a, b)] \subset [(0, b - a)] :$

$$(c, d) \in [(a, b)] \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} (c, d) \sim (a, b) \xrightarrow[\text{transitiv}]{(\clubsuit\clubsuit)} (c, d) \sim (0, b - a) \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} (c, d) \in [(0, b - a)]$$

Ad $[(0, b - a)] \subset [(a, b)] :$

$$(c, d) \in [(0, b - a)] \xrightarrow[\sim]{\text{Def.}} (c, d) \sim (0, b - a) \xrightarrow[\text{symm. transitiv}]{(\clubsuit\clubsuit)} (c, d) \sim (a, b) \xrightarrow[\text{Def.}]{\iff} (c, d) \in [(a, b)]$$

c) Die Menge aller Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation aus Teil (a) ist gegeben durch

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \sim := \{ [(u, v)] \mid u, v \in \mathbb{N}_0 \} \stackrel{!}{=} \underbrace{\{ [(a, 0)] \mid a \in \mathbb{N}_0 \}}_{:= \mathcal{A}} \cup \underbrace{\{ [(0, a)] \mid a \in \mathbb{N} \}}_{:= \mathcal{B}} \quad (\star)$$

und diese Äquivalenzklassen sind paarweise disjunkt.

Beweis:

Klar ist die Inklusion „ \supset “ in $\stackrel{!}{=}$, da in der rechten Menge in (\star) natürlich Restklassen der Äquivalenzrelation liegen (Definition!).

Bleibt noch „ \subset “ zu beweisen. Sei dazu mit $c, d \in \mathbb{N}_0$: $[(c, d)] \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 / \sim$

Falls $c \geq d \stackrel{\text{Teil (b)}}{\implies} [(c, d)] = [(c - d, 0)] \in \mathcal{A}$, da $c - d \in \mathbb{N}_0$

Falls $\neg(c \geq d) \implies c < d \implies d - c \in \mathbb{N}$, also $[(c, d)] \stackrel{\text{wegen (b)}}{=} [(0, d - c)] \in \mathcal{B}$.

Bleibt noch zu zeigen, daß je zwei verschiedene Äquivalenzklassen in $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ disjunkt sind.

- Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{N}_0$ und $[(a_1, 0)], [(a_2, 0)] \in \mathcal{A}$.

Angenommen, $[(a_1, 0)] \cap [(a_2, 0)] \neq \emptyset \implies \exists (c, d) \in [(a_1, 0)] \cap [(a_2, 0)]$
 $\stackrel{\text{Def.}}{\implies} (c, d) \sim (a_1, 0) \wedge (c, d) \sim (a_2, 0) \stackrel{\text{symm.}}{\implies} (a_1, 0) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (a_2, 0)$
 $\implies (a_1, 0) \sim (a_2, 0)$
 $\stackrel{\text{transitiv}}{\implies} \stackrel{\text{Def.}}{\implies} a_1 = a_1 + 0 = 0 + a_2 = a_2 \implies [(a_1, 0)] = [(a_2, 0)].$

- Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ und $[(0, a_1)], [(0, a_2)] \in \mathcal{B}$.

Angenommen, $[(0, a_1)] \cap [(0, a_2)] \neq \emptyset \implies \exists (c, d) \in [(0, a_1)] \cap [(0, a_2)]$
 $\stackrel{\text{Def.}}{\implies} (c, d) \sim (0, a_1) \wedge (c, d) \sim (0, a_2) \stackrel{\text{symm.}}{\implies} (0, a_1) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (0, a_2)$
 $\implies (0, a_1) \sim (0, a_2)$
 $\stackrel{\text{transitiv}}{\implies} \stackrel{\text{Def.}}{\implies} a_2 = 0 + a_2 = a_1 + 0 = a_1 \implies [(0, a_1)] = [(0, a_2)].$

- Seien $a_1 \in \mathbb{N}_0$ und $a_2 \in \mathbb{N}$ und $[(a_1, 0)] \in \mathcal{A}$, $[(0, a_2)] \in \mathcal{B}$.

Angenommen, $[(a_1, 0)] \cap [(0, a_2)] \neq \emptyset \implies \exists (c, d) \in [(a_1, 0)] \cap [(0, a_2)]$
 $\stackrel{\text{Def.}}{\implies} (c, d) \sim (a_1, 0) \wedge (c, d) \sim (0, a_2) \stackrel{\text{symm.}}{\implies} (a_1, 0) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (0, a_2)$
 $\implies (a_1, 0) \sim (0, a_2)$
 $\stackrel{\text{transitiv}}{\implies} \stackrel{\text{Def.}}{\implies} a_1 + a_2 = 0 + 0 = 0$, Widerspruch zu $a_1 \geq 0$ und $a_2 > 0$, denn daraus folgt $a_1 + a_2 > 0$.
Also muß $[(a_1, 0)] \cap [(0, a_2)] = \emptyset$ gelten, q.e.d.