

## Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

### Aufgabe 49 (4 Punkte)

- (a) Sei  $K$  ein Körper,  $A \in K^{n \times n}$  eine Dreiecksmatrix. Zeigen Sie:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

(b) Zeigen Sie:  $\det \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & \ddots & & n \\ \vdots & & & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} = (-1)^{n-1} n!.$

Hinweis: Ziehen Sie von der ersten Zeile die letzte Zeile ab und verwenden Sie den Laplaceschen Entwicklungssatz.

### Aufgabe 50 (4 Punkte)

Berechnen Sie  $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- (a) mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz,  
(b) durch Transformation in Zeilenstufenform mittels elementarer Zeilenumformungen.

### Aufgabe 51 (4 Punkte)

- (a) Sei  $K$  ein Körper mit  $1 + 1 \neq 0$ ,  $A \in K^{n \times n}$  antisymmetrisch, d.h.  $a_{ij} = -a_{ji}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ).

Zeigen Sie:  $n$  ungerade  $\Rightarrow \det A = 0$ .

(Hinweis: Zusammenhang zwischen  $A$  und  $A^T$ .)

- (b) Berechnen Sie für  $\varphi \in \mathbb{R}$   $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ . Steht das Ergebnis im Widerspruch zu (a) ?

Bitte wenden!

**Aufgabe 52** (4 Punkte)

Sei  $K$  ein Körper.

- (a) Sei  $A \in K^{m \times m}$  invertierbar,  $B \in K^{m \times n}$ ,  $C \in K^{n \times m}$  und  $D \in K^{n \times n}$ . Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det (D - C \cdot A^{-1} \cdot B).$$

Hinweis: Berechnen Sie  $\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ -C \cdot A^{-1} & E_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

- (b) Sei  $A \in K^{n \times n}$  invertierbar,  $B, C, D \in K^{n \times n}$  und  $A \cdot C = C \cdot A$ .

Zeigen Sie:  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det (A \cdot D - C \cdot B)$ .

**Abgabe einzeln oder zu zweit:** Dienstag, 27.1.2009 bis 12<sup>00</sup> Uhr,  
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock