

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 5

Zu Aufgabe 17:

Es sei (G, \circ) eine endliche Gruppe mit $n = |G|$, $a \in G$ und $m := \min \{k \in \mathbb{N} \mid a^k = e\}$.

Ad (a) : $a^i = a^j \iff m \mid (i - j) \quad (i, j \in \mathbb{Z})$.

Beweis:

Wir verwenden die im Tutorium bewiesene Aussage:

$$(\clubsuit) \quad a^k = e \iff k \in m\mathbb{Z} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

[Beweis Wir müssen eine Äquivalenz beweisen, d.h. die Richtungen „ \implies “ und „ \impliedby “.

„ \impliedby “ :

Es ist $k \in m\mathbb{Z} \implies \exists q \in \mathbb{Z} : k = m \cdot q \implies a^k = a^{mq} \stackrel{\text{Aufg. 14}}{\stackrel{\text{Tut.}}{=}} (a^m)^q$.

Nun ist $m = \min \{l \in \mathbb{N} \mid a^l = e\} \implies m \in \{l \in \mathbb{N} \mid a^l = e\} \implies a^m = e$, also folgt:

$$a^k = (a^m)^q = e^q = e \quad \left(\text{da } e^q = (a^0)^q = a^{0q} = a^0 = e \right) \quad \text{q.e.d.}$$

„ \implies “ :

Nun ist vorausgesetzt, daß $a^k = e$, und es ist zu zeigen, daß $k \in m\mathbb{Z}$. Wie oben gilt: $a^m = e$ mit $m \in \mathbb{N}$. Nach Vorlesung (0.11) (Division mit Rest) gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$, so daß $k = m \cdot q + r$ mit $0 \leq r < m$. Damit können wir schreiben:

$$e = a^k = a^{mq+r} \stackrel{\text{Aufg. 14(a)}}{=} a^{mq} \circ a^r \stackrel{\text{Aufg. 14}}{\stackrel{\text{Tut.}}{=}} (a^m)^q \circ a^r = e^q \circ a^r = e \circ a^r = a^r.$$

Nun ist r eine ganze Zahl mit $0 \leq r < m$. Wenn $r = 0$ gilt, so ist $k = mq \in \mathbb{Z}$ wie gewünscht. Wir müssen also zeigen, daß $r \neq 0$ nicht möglich ist. Also:

Angenommen, $r \neq 0 \implies r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r < m \stackrel{\text{da } a^r = e}{\implies} r \in \{l \in \mathbb{N} \mid a^l = e\} \stackrel{\text{Def. min}}{\implies} r \geq \min \{l \in \mathbb{N} \mid a^l = e\} = m \implies m > r \geq m$, und das ist ein Widerspruch.

Also muß $r = 0$ gelten, d.h. $k = qm$ q.e.d.]

Nun zum Beweis von (a) :

ad „ \implies “ :

Nach Aufgabe 14(b) gilt für jedes $q \in \mathbb{Z} : a^{-q} = a^{q \cdot (-1)} = (a^q)^{-1} \quad (*)$.

Damit folgt für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ mit $a^i = a^j$:

$$a^i = a^j \implies a^{i-j} \stackrel{\text{Aufg. 14(a)}}{=} a^i \circ a^{-j} \stackrel{(*)}{\stackrel{a^i = a^j}{=}} a^j \circ (a^j)^{-1} = e \stackrel{(\clubsuit)}{\implies} (i - j) \in m\mathbb{Z} \stackrel{\text{Def. min}}{=} m \mid (i - j)$$

ad „ \impliedby “ :

$$m \mid (i - j) \implies \exists q \in \mathbb{Z} : mq = i - j \implies i = mq + j \implies$$

$$a^i = a^{mq+j} \stackrel{\text{Aufg. 14}}{\stackrel{\text{Tut.}}{=}} (a^m)^q \circ a^j \stackrel{a^m=e}{=} e^q \circ a^j = e \circ a^j = a^j \quad \text{q.e.d.}$$

Ad (b) : $\langle a \rangle = \{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}$ und $|\langle a \rangle| = m$.

Beweis:

Zu $\langle a \rangle = \{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}$:

Nach Definition ist $\langle a \rangle = \{a^l \mid l \in \mathbb{Z}\}$; damit ist „ \supset “ klar:

$$\langle a \rangle = \{a^l \mid l \in \mathbb{Z}\} \supset \{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}.$$

Für „ \subset “ folgt wieder mit Division mit Rest: jedes $l \in \mathbb{Z}$ hat eine Darstellung $l = mq + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < m$. Damit:

$$a^l = a^{mq+r} \stackrel{\text{Aufg. 14}}{=} a^{mq} \circ a^r \stackrel{\text{Tut.}}{=} (a^m)^q \circ a^r \stackrel{a^m=e}{=} e^q \circ a^r = e \circ a^r = a^r.$$

Weil aber $r \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ folgt damit $a^l = a^r \in \{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}$. q.e.d.

Zu $|\langle a \rangle| = m$:

Wir wissen bereits, daß $\langle a \rangle = \{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}$. Um $|\langle a \rangle| = m$ nachzuweisen, müssen wir zeigen, daß alle Elemente in der Menge $\{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}$ verschieden sind.

Zu zeigen ist also für alle $i, j \in \mathbb{Z}$:

$$\forall 0 \leq i, j < m : a^i = a^j \iff i = j$$

Dabei ist die Richtung „ \Leftarrow “ klar, und für „ \Rightarrow “ sei $a^i = a^j \stackrel{\text{Teil (a)}}{\implies} m \mid (i - j) \implies \exists k \in \mathbb{Z} : i - j = mk$.

Es ist $i \geq j$ oder $i < j$; wir können also ohne Einschränkung annehmen, daß $i \geq j$. Dann aber ist $m \geq 0$, d.h. $m \in \mathbb{N}_0$. Ferner $j \geq 0 \implies -j \leq 0$, also:

$$j \leq i \implies 0 \leq \underbrace{i - j}_{=mk} \leq (m-1) - j \stackrel{-j \leq 0}{\leq} m-1-0 = m-1 \stackrel{i-j=mk}{\implies} 0 \leq mk \leq m-1$$

Da $m \geq 1$ muß $k \geq 0$ gelten;

falls aber $k \geq 1 \implies m \leq m \cdot k \leq m-1$, und das ist ein Widerspruch.

Also $0 \leq k < 1 \stackrel{k \in \mathbb{Z}}{\implies} k = 0 \implies i - j = km = 0 \implies i = j$ q.e.d.

Ad (c) : $m \mid n$

Beweis:

Nach Aufgabe 14(c) ist für jedes $a \in G$ $\langle a \rangle$ eine Untergruppe von G . Nach dem Satz von Lagrange (Vorlesung (1.12)) ist in jeder endlichen Gruppe mit Untergruppe U $|U|$ ein Teiler von $|G|$,

d.h. $|U| \mid |G|$.

Hier: $U = \langle a \rangle \wedge |G| = n$, also mit Teil (b) : $|U| = |\langle a \rangle| = m \mid n = |G|$. q.e.d.

Zu Aufgabe 18: Es sei K eine Körper mit Verknüpfungen $+$, \cdot und Einselement 1 .

Zu (a) :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad (a, c \in K; b, d \in K \setminus \{0\})$$

Beweis:

Nach Definition (Vorlesung) ist $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$. Damit:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &\stackrel{\text{Def.}}{=} a \cdot b^{-1} + c \cdot d^{-1} = a \cdot 1 \cdot b^{-1} + d \cdot 1 \cdot d^{-1} \\ &\stackrel{\substack{b \neq 0 \\ d \neq 0}}{=} a \cdot (d \cdot d^{-1}) \cdot b^{-1} + c \cdot (b \cdot b^{-1}) \cdot d^{-1} \\ &\stackrel{\substack{(K, \cdot) \\ \text{assoz.}}}{=} (ad) \cdot (d^{-1} b^{-1}) + (cb) \cdot (b^{-1} d^{-1}) \\ &\stackrel{(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}}{=} (ad) \cdot (bd)^{-1} + (cb) \cdot (db)^{-1} \\ &\stackrel{\substack{(K, \cdot) \\ \text{kommut.}}}{=} (ad) \cdot (bd)^{-1} + (bc) \cdot (bd)^{-1} \stackrel{\text{Distr.}}{=} (ad + bc) \cdot (bd)^{-1} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{ad + bc}{bd} \end{aligned}$$

Zu (b) :

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (a \in K; b, c, d \in K \setminus \{0\})$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{a \cdot b^{-1}}{c \cdot d^{-1}} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} (ab^{-1}) \cdot (cd^{-1})^{-1} \\ &\stackrel{(x \circ y)^{-1} = y^{-1} \circ x^{-1}}{=} (ab^{-1}) \cdot ((d^{-1})^{-1} \cdot c^{-1}) \\ &\stackrel{(x^{-1})^{-1} = x}{=} (ab^{-1}) \cdot (dc^{-1}) \\ &\stackrel{\substack{(K, \cdot) \\ \text{komm.}}}{=} (ad) \cdot (c^{-1} b^{-1}) \\ &\stackrel{\substack{\text{Aufg.} \\ 14}}{=} (ad) \cdot (bc)^{-1} \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{ad}{bc} \end{aligned}$$

Zu Aufgabe 19:

Wir versehen \mathbb{R}^2 mit den beiden Verknüpfungen

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad (\text{Addition})$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (\text{Multiplikation})$$

Mit Übungsaufgabe 16 (a) folgt, daß $(\mathbb{R}^2, +)$ (mit der oben definierten Addition) eine Gruppe ist (setze $(G, \circ) = (H, *) = (\mathbb{R}, +)$). Da $(\mathbb{R}, +)$ abelsch ist, ist natürlich auch $(\mathbb{R}^2, +)$ abelsch.

In den Tutorien wurde gezeigt:

(\mathbb{R}^2, \cdot) ist assoziativ

$$\begin{aligned}
\left[(x_1, y_1) \cdot \left((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3) \right) \right] &\stackrel{\text{Def.}}{=} (x_1, y_1) \cdot (x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} \left(x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1(x_2 y_3 + x_3 y_2), x_1(x_2 y_3 + x_3 y_2) + (x_2 x_3 + y_2 y_3)y_1 \right) \\
&= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3 - x_3 y_1 y_2, x_1 x_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1 + y_1 y_2 y_3) \\
\left((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \right) \cdot (x_3, y_3) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \cdot (x_3, y_3) \\
&= \left((x_1 x_2 - y_1 y_2)x_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1)y_3, (x_1 x_2 - y_1 y_2)y_3 + x_3(x_1 y_2 + x_2 y_1) \right) \\
&= (x_1 x_2 x_3 - x_3 y_1 y_2 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3, x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1)
\end{aligned}$$

und beide Ausdrücke sind gleich (!).]

(\mathbb{R}^2, \cdot) ist kommutativ

$$\left[(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) \stackrel{\text{Def.}}{=} (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \stackrel{(\mathbb{R}, +, \cdot) \text{ komm.}}{=} (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2) \stackrel{\text{Def.}}{=} (x_2, y_2) \cdot (x_1, y_1) \right]$$

(\mathbb{R}^2, \cdot) hat als neutrales Element $e = (1, 0)$

$$\left[(x_1, y_1) \cdot (1, 0) = (x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + 1 \cdot y_1) = (x_1, y_1) \right]$$

Für die Körpereigenschaft von $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ fehlen also neben der Abgeschlossenheit der Multiplikation in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ noch die Existenz von inversen Elementen in $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ und das (da „ \cdot “ kommutativ) Distributivgesetz. Diese letzten beiden Eigenschaften waren zu zeigen. Die Abgeschlossenheit folgt dann sofort:

$$\forall (x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : (x, y) \cdot (u, v) \neq (0, 0)$$

$$\left[\text{denn ist } (x, y) \cdot (u, v) = (0, 0) \text{ und } (x, y) \neq (0, 0) \stackrel{\text{Existenz von } (x, y)^{-1}}{\implies}
\right]$$

$$(0, 0) \stackrel{\text{Vorl. 1.15(a)}}{=} (x, y)^{-1} \cdot (0, 0) = (x, y)^{-1} \cdot ((x, y) \cdot (u, v)) = ((x, y)^{-1} \cdot (x, y)) \cdot (u, v) \stackrel{\text{Def.}}{=} (1, 0) \cdot (u, v) = (u, v)$$

$$\implies (u, v) = (0, 0) \quad \text{q.e.d.} \quad]$$

Ad (a) :

$\forall (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$ ist das bzgl. der Multiplikation inverse Element zu (x, y) .

Beweis:

$(x, y) \neq (0, 0) \implies x \neq 0$ oder $y \neq 0 \implies x^2 + y^2 \neq 0$. Damit ist sinnvoll:

$$\begin{aligned} (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) &= \left(x \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} - y \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right), x \cdot \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot y \right) \\ &= \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, 0 \right) \\ &= (1, 0) \end{aligned}$$

Da (\mathbb{R}^2, \cdot) kommutativ ist, ist damit alles gezeigt (oder auch mit Vorlesung (1.2)).

Ad (b) :

$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2 : ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)$

Beweis:

$$\begin{aligned} ((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) &\stackrel{\text{Def.}}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} ((x_1 + x_2) \cdot x_3 - (y_1 + y_2) \cdot y_3, (x_1 + x_2) \cdot y_3 + x_3 \cdot (y_1 + y_2)) \\ &= (x_1 x_3 + x_2 x_3 - y_1 y_3 - y_2 y_3, x_1 y_3 + x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_3 y_2) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} (x_1 x_3 - y_1 y_3, x_1 y_3 + x_3 y_1) + (x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2) \\ &\stackrel{\text{Def.}}{=} (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Damit sind alle Körpereigenschaften für $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ nachgewiesen; wir bezeichnen diesen Körper mit

$$\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot) \quad (\text{den Körper der } \underline{\text{komplexen Zahlen.}})$$

Zu Aufgabe 20:

Für die folgenden komplexen Zahlen sind jeweils der Realteil und der Imaginärteil zu bestimmen. Dafür wollen wir folgende (in jedem Körper gültige) Identität benutzen:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C} : (a, b) = a + ib \wedge (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 \stackrel{i^2 = -1}{=} a^2 + b^2 \in \mathbb{R} \quad (\blacksquare)$$

Ad (a) :

$$\begin{aligned} z_1 &:= \frac{1 - 2i}{2 + 3i} \stackrel{\substack{\text{erweitern} \\ \text{Aufg. 18}}}{=} \frac{(1 - 2i) \cdot (2 - 3i)}{(2 + 3i) \cdot (2 - 3i)} \\ &\stackrel{\substack{\text{Distrib.} \\ (\blacksquare)}}{=} \frac{2 - 3i - 4i + 6i^2}{4 + 9} \\ &\stackrel{i^2 = -1}{=} \frac{2 - 7i - 6}{13} \\ &= \frac{-4 - 7i}{13} = -\frac{4}{13} - \frac{7}{13} \cdot i \end{aligned}$$

Also gilt: $Re(z_1) = -\frac{4}{13} \wedge Im(z_1) = -\frac{7}{13}$

Ad (b) :

$$\begin{aligned} z_2 &:= \frac{i}{\sqrt{2} + \frac{2}{1+i}} \stackrel{\substack{\text{erweitern} \\ \text{Aufg. 18}}}{=} \frac{i}{\sqrt{2} + \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2} + \frac{2(1-i)}{2}} \\ &= \frac{i}{(\sqrt{2} + 1) - i} \\ &\stackrel{\substack{\text{erweitern} \\ \text{Aufg. 18}}}{=} \frac{i \cdot ((\sqrt{2} + 1) + i)}{((\sqrt{2} + 1) - i)((\sqrt{2} + 1) + i)} \\ &= \frac{i \cdot (\sqrt{2} + 1) + i^2}{(\sqrt{2} + 1)^2 + 1} \\ &\stackrel{i^2 = -1}{=} \frac{-1 + (\sqrt{2} + 1) \cdot i}{(2 + 2\sqrt{2} + 1) + 1} \\ &= \frac{-1 + (\sqrt{2} + 1) \cdot i}{4 + 2\sqrt{2}} \\ &\stackrel{\text{erweitern}}{=} \frac{(-1 + (\sqrt{2} + 1) \cdot i) \cdot (4 - 2\sqrt{2})}{(4 + 2\sqrt{2}) \cdot (4 - 2\sqrt{2})} \\ &= \frac{-4 + 2\sqrt{2} + 2i \cdot (\sqrt{2} + 1) \cdot (2 - \sqrt{2})}{16 - 8} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left[2(\sqrt{2} - 2) + 2i \cdot (2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2}) \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left[(\sqrt{2} - 2) + i\sqrt{2} \right] \end{aligned}$$

Also gilt: $Re(z_2) = -\frac{2 - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - 2}{4} \wedge Im(z_2) = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Ad (c) : $z_3 := (2 - i)^5$

Nach der Bemerkung zu (1.18) Vorlesung gilt im Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen der binomische Lehrsatz:

$$\forall u, v \in \mathbb{C} : (u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

Weiter gilt für die Potenzen von $i \in \mathbb{C}$:

$i^2 = -1 \implies i^4 = (-1)^2 = 1$; weil aber $i^3 = i^2 \cdot i = -i$ liefert wieder die Division mit Rest für jedes $k \in \mathbb{Z} : k = 4q + r$ für geeignete $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r < 4$.

Also ist $i^k = i^{4q+r} \stackrel{\text{Aufg. 14}}{=} i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q i^r = i^r \in \{i^0, i, i^2, i^3\} = \{1, i, -1, -i\} \implies$

$$\forall k \in \mathbb{Z} : i^k \in \{1, i, -1, -i\} \quad (\heartsuit)$$

Insbesondere gilt damit $\langle i \rangle = \{1, -1, i, -i\}$ als Untergruppe in $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} (2 - i)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} 2^k (-i)^{5-k} \\ &= \underbrace{\binom{5}{0}}_{=1} 2^0 (-i)^5 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{=5} 2^1 (-i)^4 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{=10} 2^2 (-i)^3 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{=10} 2^3 (-i)^2 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{=5} 2^4 (-i)^1 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{=1} 2^5 (-i)^0 \\ &= (-1)^5 i^5 + 10(-1)^4 i^4 + 40(-1)^3 i^3 + 80(-1)^2 i^2 + 80(-i) + 32 \\ &\stackrel{(\heartsuit)}{=} -i + 10 + 40i - 80 - 80i + 32 \\ &= -38 - 41i \end{aligned}$$

Also gilt: $Re(z_3) = -38 \quad \wedge \quad Im(z_3) = -41$

Ad (d) : $z_4 := 1 + i + i^2 + \dots + i^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Dies können wir direkt berechnen, indem wir die Aussage (\heartsuit) von oben benutzen:

Für $n = 4q + r$, $(q, r \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq r < 4)$ gilt gemäß (\heartsuit) für alle $q \in \mathbb{Z} : i^n = i^{4q+r} = i^r$, also:

$$i^{4q+0} + i^{4q+1} + i^{4q+2} + i^{4q+3} = \underbrace{(i^4)^q}_{=1, \text{ da } i^4=1} \cdot 1 + (i^4)^q \cdot i + (i^4)^q \cdot (-1) + (i^4)^q \cdot (-i) = 1 + i - 1 - i = 0$$

Je 4 aufeinanderfolgende Terme $i^{4q} + i^{4q+1} + i^{4q+2} + i^{4q+3} = 0$ liefern also keinen Beitrag zur Summe, weshalb folgt:

$$\begin{aligned} 1 + i + i^2 + \dots + i^n &= \underbrace{(1 + i + i^2 + i^3)}_{=0} + \underbrace{(i^4 + i^5 + i^6 + i^7)}_{=0} + \\ &\quad + \dots + \underbrace{(i^{4(q-1)} + i^{4(q-1)+1} + i^{4(q-1)+2} + i^{4(q-1)+3})}_{=0} + \underbrace{(i^{4q} + \dots + i^{4q+r})}_{=\sum_{k=0}^r i^{4q+k}} \\ &= \sum_{k=0}^r i^k \\ &= 1 + \dots + i^r \quad (\text{mit } 0 \leq r < 4) \end{aligned}$$

Je nachdem, welchen Rest n bei Division mit 4 besitzt, hat also z_4 verschiedene Werte:

$$z_4 = \begin{cases} i^0 & = & = & 1 & \text{falls } r = 0 \\ i^0 + i^1 & = & = & 1 + i & \text{falls } r = 1 \\ i^0 + i^1 + i^2 & = & 1 + i - 1 & = & i & \text{falls } r = 2 \\ i^0 + i^1 + i^2 + i^3 & = & 1 + i - 1 - i & = & 0 & \text{falls } r = 3 \end{cases}$$

Dies kann man aber auch mit Hilfe der geometrischen Summenformel beweisen.

Zunächst gilt in jedem Ring $(R, +, \cdot)$ mit Einselement 1 :

$$\forall q \in R : (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \cdot (1 - q) = 1 - q^{n+1} \quad (\diamond)$$

[Beweis:

$$\begin{aligned} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \cdot (1 - q) &\stackrel{\text{Distrib.}}{=} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \cdot 1 + (1 + q + q^2 + \dots + q^n) \cdot (-q) \\ &\stackrel{\text{Distrib.}}{=} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) + ((-q) + q \cdot (-q) + \dots + q^n \cdot (-q)) \\ &\stackrel{\text{Vorl.}}{=} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) + (-q - q^2 - \dots - q^{n+1}) \\ &\stackrel{\text{1.15 (b)}}{=} \\ &\stackrel{(R,+)}{=} 1 + (q + q^2 + \dots + q^n) + (-q - q^2 - \dots - q^n) - q^{n+1} \\ &\stackrel{\text{assoz.}}{=} \\ &\stackrel{\text{Vorl.}}{=} 1 + (q + q^2 + \dots + q^n) - (q + q^2 + \dots + q^n) - q^{n+1} \\ &\stackrel{\text{1.15 (b)}}{=} \\ &\stackrel{\text{additives}}{=} 1 - q^{n+1} \quad \text{q.e.d.} \quad] \\ &\stackrel{\text{Inverses}}{=} \end{aligned}$$

Damit folgt im Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit $q = i$:

$$1 + i + i^2 + \dots + i^n = \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dies ist dasselbe Ergebnis wie oben, denn wenn wir wieder $n = 4q + r$, ($q, r \in \mathbb{Z}$; $0 \leq r < 4$) via Division mit Rest darstellen, so folgt (dabei ist r der Rest bei Division durch 4):

$$i^{n+1} = i^{4q+r+1} = i^{4q} \cdot i^{r+1} = i^{r+1} \implies$$

$$\text{Falls } r = 0 : i^{n+1} = i^{r+1} = i^1 \implies \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^1}{1 - i} = 1$$

$$\text{Falls } r = 1 : i^{n+1} = i^2 = -1 \implies \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^2}{1 - i} = \frac{2}{1 - i} = \frac{2(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2(1 + i)}{2} = 1 + i$$

$$\text{Falls } r = 2 : i^{n+1} = i^3 = -i \implies \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^3}{1 - i} = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\text{Falls } r = 3 : i^{n+1} = i^4 = 1 \implies \frac{1 - i^{n+1}}{1 - i} = \frac{1 - i^4}{1 - i} = 0$$

Damit:

$$1 + i + i^2 + \dots + i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } r = 0 \\ 1 + i & \text{falls } r = 1 \\ i & \text{falls } r = 2 \\ 0 & \text{falls } r = 3 \end{cases}$$