

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 29 (4 Punkte)

Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass A invertierbar ist und bestimmen Sie A^{-1} .

Aufgabe 30 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times m}$.

(a) Zeigen Sie: Die Matrix $M := \begin{pmatrix} E_m & A \\ B & E_n \end{pmatrix} \in K^{(m+n) \times (m+n)}$ ist genau dann invertierbar, wenn $E_m - AB$ und $E_n - BA$ invertierbar sind.

(b) Geben Sie M^{-1} (in Blockschreibweise) an, wenn M invertierbar ist.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe von (b) die Inverse von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 31 (4 Punkte)

Sei K ein Körper, $A \in K^{n \times n}$ invertierbar. Zeigen Sie:

Ist A durch elementare Zeilenumformungen vom Typ II (in der Reihenfolge des Beweises von Satz 2.23) ohne Verwendung von Zeilenumformungen vom Typ III in eine rechte Dreiecksmatrix $R \in K^{n \times n}$ transformierbar, so gibt es eine linke Dreiecksmatrix $L \in K^{n \times n}$ mit $l_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, n$, so dass

$$A = LR.$$

Bemerkung: In der numerischen Mathematik wird in der Regel statt des Gaußschen Eliminationsverfahren eine LR-Zerlegung durchgeführt. Darunter versteht man die folgende allgemeinere Aussage, die lediglich die Invertierbarkeit von A voraussetzt:

Es gibt eine Permutationsmatrix $P \in K^{n \times n}$, eine linke Dreiecksmatrix $L \in K^{n \times n}$ mit $l_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, n$, und eine rechte Dreiecksmatrix $R \in K^{n \times n}$, so dass

$$PA = LR.$$

Dabei heißt $P \in K^{n \times n}$ Permutationsmatrix, wenn $P = (e_{\pi(1)} e_{\pi(2)} \dots e_{\pi(n)})$ für $\pi \in S_n$.

($\pi \in S_n \Leftrightarrow \pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv.)

Bitte wenden!

Aufgabe 32 (4 Punkte)

Sei $H := \left\{ \begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} : w, z \in \mathbb{C} \right\}$ und $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$.

Zeigen Sie:

- (a) $(H, +, \cdot)$ ist ein Ring mit Einselement und $(H \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

Bemerkung: Eine algebraische Struktur mit diesen Eigenschaften heißt Schiefkörper. Der Unterschied zum Körper besteht darin, dass die Multiplikation nicht als kommutativ vorausgesetzt ist.

- (b) $I^2 = J^2 = K^2 = -E$.

- (c) $IJ = K$, $JK = I$, $KI = J$, $JI = -K$, $KJ = -I$, $IK = -J$.

- (d) $\begin{pmatrix} w & z \\ -\bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = \operatorname{Re} w \cdot E + \operatorname{Im} w \cdot I + \operatorname{Re} z \cdot J + \operatorname{Im} z \cdot K \quad (z, w \in \mathbb{C})$.

Bemerkung: Mit der bijektiven Zuordnung $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mapsto \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{pmatrix} \in H$ und der durch die Matrizenmultiplikation induzierten Multiplikation $*$ wird $(\mathbb{R}^4, +, *)$ zum Hamiltonschen Quaternionenschiefkörper.

Abgabe einzeln oder zu zweit: Dienstag, 16.12.2008 bis 12⁰⁰ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock