

Lösungsvorschläge zu Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Blatt 9

Zu Aufgabe 33:

Es sind die Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zu bestimmen, für die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda x & + & y & & & = & \mu \\ x & + & \lambda y & + & z & = & \mu \\ & + & y & + & \lambda z & = & \mu \end{array}$$

lösbar ist.

Zunächst schreiben wir das lineare Gleichungssystem in Matrixform:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

Um die Frage der Lösbarkeit zu entscheiden, bringen wir das Gleichungssystem auf Dreiecksform,

d.h. wir wenden elementare Zeilenumformungen auf die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ an, um eine obere

Dreiecksmatrix R zu erzeugen. Zugleich (mit Hilfe der gleichen Umformungen) transformieren wir

den inhomogenen Anteil $b = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$. Da die elementaren Zeilenumformungen der Multiplikation von

links mit Elementarmatrizen entsprechen, gibt es eine invertierbare Matrix $F \in GL(n, \mathbb{R})$, so daß $\underbrace{F \cdot A}_{=R} = F \cdot b \iff R = F \cdot b$. Also führen wir die elementaren Zeilenumformungen gleich an der

erweiterten Matrix $(A|b)$ durch:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 0 & \mu \\ 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \end{array} \right) & \xrightarrow[\text{Vertausche I/II}]{\text{Vertausche I/III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & \mu \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\lambda \cdot \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 1-\lambda^2 & -\lambda & \mu-\lambda\mu \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\text{III}-(1-\lambda^2) \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \underbrace{-\lambda-\lambda(1-\lambda^2)}_{=-\lambda(2-\lambda^2)} & \underbrace{\mu-\lambda\mu-(1-\lambda^2)\mu}_{=\mu-\lambda\mu-\mu+\mu\lambda^2} \end{array} \right) \quad (\bullet) \\ & \hspace{15em} = \mu(\lambda^2-\lambda) \\ & \hspace{15em} = \mu\lambda(\lambda-1) \end{aligned}$$

Dies ist eine obere Dreiecksmatrix; sie ist invertierbar genau dann, wenn alle Einträge in der Hauptdiagonalen ungleich Null sind, d.h. genau dann, wenn $-\lambda(2-\lambda^2) \neq 0 \iff \lambda \neq 0 \wedge \lambda^2 \neq 2$. (Siehe

Aufgabe 35 (★) für einen Beweis)

Dann besagt die Fredholmsche Alternative, daß das Gleichungssystem in diesem Falle eindeutig lösbar ist, unabhängig von μ .

Wir berechnen zusätzlich die Lösung (war nicht verlangt). Dazu transformieren wir weiter (für $\lambda(2 - \lambda^2) \neq 0$) :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\lambda(2 - \lambda^2) & \mu\lambda(\lambda - 1) \end{array} \right) \xrightarrow{-\left(\frac{1}{\lambda(2 - \lambda^2)}\right) \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \lambda & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{\mu\lambda(\lambda - 1)}{\lambda(2 - \lambda^2)} \end{array} \right) \longrightarrow \\ & \hspace{15em} = \frac{\mu(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 2} \\ & \xrightarrow[\text{II} - \lambda \cdot \text{III}]{\text{I} - \lambda \cdot \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 - \lambda^2 & \mu - \lambda\mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu - \frac{\lambda\mu(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\mu(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 2} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I} - (1 - \lambda^2) \cdot \text{III}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \mu(1 - \lambda) - (1 - \lambda^2) \frac{\mu(\lambda - 1)}{\lambda^2 - 2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\mu}{\lambda^2 - 2} [\lambda^2 - 2 - \lambda(\lambda - 1)] \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\mu}{\lambda^2 - 2} (\lambda - 1) \end{array} \right) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Lösung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda^2 - 2} [(1 - \lambda)(\lambda^2 - 2) + (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1)] \\ \frac{\mu}{\lambda^2 - 2} [\lambda^2 - 2 - \lambda^2 + \lambda] \\ \frac{\mu}{\lambda^2 - 2} [\lambda - 1] \end{pmatrix} = \frac{\mu}{\lambda^2 - 2} \cdot \begin{pmatrix} (1 - \lambda)[\lambda^2 - 2 - \lambda^2 + 1] \\ \lambda - 2 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mu}{\lambda^2 - 2} \cdot \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ \lambda - 2 \\ \lambda - 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda \neq 0, \lambda^2 \neq 2) \end{aligned}$$

Zurück zur Aufgabe; wir müssen noch die Fälle untersuchen, wo die Matrix A nicht invertierbar ist, d.h. wenn $\lambda = 0$ oder $\lambda^2 = 2$. In diesem Fall besagt die Fredholmsche Alternative, daß das Gleichungssystem entweder gar keine oder aber (über dem Grundkörper \mathbb{R}) unendlich viele Lösungen besitzt.

Falls $\lambda = 0$:

$$(A | b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{wegen } (\bullet) \text{ (s.o.)})$$

Dieses System lösen wir durch Rückwärtssubstitution.

Die 2. Gleichung lautet $y = \mu$.

Die 1. Gleichung lautet $x + z = \mu \implies x = \mu - z$. Also sind die Lösungen (unabhängig von μ) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu - z \\ \mu \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \in \mathbb{R} \text{ beliebig}) \quad (\text{Verifizieren!})$$

Falls $\lambda^2 = 2$:

Dann ist $\lambda \in \{\pm\sqrt{2}\}$, d.h. $\lambda = \epsilon\sqrt{2}$ mit $\epsilon \in \{\pm 1\}$.

$$(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \epsilon\sqrt{2} & 1 & \mu \\ 0 & 1 & \epsilon\sqrt{2} & \mu \\ 0 & 0 & 0 & \mu \cdot \epsilon\sqrt{2}(\epsilon\sqrt{2} - 1) \end{array} \right) \quad (\text{wegen } (\bullet))$$

Wenn es eine Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gibt, so liefert die dritte Gleichung:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \epsilon\mu\sqrt{2}(\epsilon\sqrt{2} - 1) \iff 0 = \epsilon\mu\sqrt{2}(\epsilon\sqrt{2} - 1) \iff \mu = 0.$$

Es muß also für die Lösbarkeit $\mu = 0$ erfüllt sein; für $\mu \neq 0$ kann es keine Lösung geben.

Falls also $\lambda \in \{\pm\sqrt{2}\}$ und $\mu = 0$, so folgt:

$$(A|b) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \epsilon\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{I - \epsilon\sqrt{2} \cdot II} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{denn: } (\epsilon\sqrt{2})^2 = 2)$$

d.h. wieder mit Rückwärtssubstitution:

$$\text{Die 2. Gleichung lautet: } y + (\epsilon\sqrt{2})z = 0 \implies y = -(\epsilon\sqrt{2})z$$

$$\text{Die 1. Gleichung lautet: } x - z = 0 \implies x = z.$$

Also gilt für jede Lösung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -\epsilon\sqrt{2}z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ -\epsilon\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{mit } z \in \mathbb{R} \text{ beliebig und } \epsilon \in \{\pm 1\}). \quad (\text{Verifizieren !})$$

Damit gilt insgesamt:

$$\text{Das Gleichungssystem ist lösbar} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \neq 0 \wedge \lambda \notin \{\pm\sqrt{2}\} \wedge \mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig} & (\text{eindeutig}) \\ \lambda = 0 \wedge \mu \in \mathbb{R} \text{ beliebig} & (\infty \text{ viele Lösungen}) \\ \lambda \in \{\pm\sqrt{2}\} \wedge \mu = 0 & (\infty \text{ viele Lösungen}) \end{array} \right\}$$

Zu Aufgabe 34:

Für vier Teilmengen $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) soll entschieden werden, ob es sich um Untervektorräume von \mathbb{R}^n handelt.

In einem beliebigen Vektorraum V über einem Körper K ist eine Teilmenge U genau dann ein Untervektorraum, wenn gilt:

- (i) $U \neq \emptyset$
- (ii) $\forall a, b \in U : a + b \in U$
- (iii) $\forall a \in U \forall \lambda \in K : \lambda a \in U$

(a) $U_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_n\}$:

Ad (i): Wähle $x_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n \implies 0 = (0, \dots, 0) \in U_1 \implies U_1 \neq \emptyset$

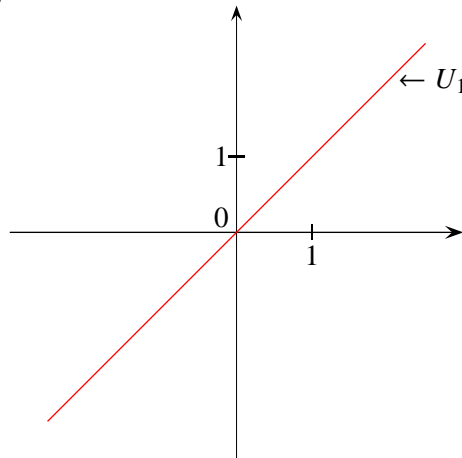
Ad (ii): Seien $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in U_1$, d.h. $a_1 = \dots = a_n \wedge b_1 = \dots = b_n$
 $\iff \forall 1 \leq i \leq n : a_i = a_1$ sowie $\forall 1 \leq i \leq n : b_i = b_1$ (\star).

Dann gilt:

$$a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \implies \forall 1 \leq i \leq n : (a + b)_i = a_i + b_i \stackrel{(\star)}{=} a_1 + b_1 = (a + b)_1$$

Ad (iii): Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in U_1$ und $\lambda \in K$, d.h. $\forall 1 \leq i \leq n : a_i = a_1$ und
 $\lambda a = \lambda(a_1, \dots, a_n) \stackrel{\text{Def.}}{=} (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$, und damit :
 $\forall 1 \leq i \leq n : (\lambda a)_i = \lambda a_i = \lambda a_1 = (\lambda a)_1 \stackrel{\text{Def. von } U_1}{\implies} \lambda a \in U_1 \quad \text{q.e.d.}$

Skizze für $n = 2$:



(b) $U_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$:

Ad (i): Wähle $x_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n \implies \sum_{i=1}^n x_i = 0 \implies (0, \dots, 0) \in U_2 \implies U_2 \neq \emptyset$

Ad (ii): Seien $a = (a_1, \dots, a_n) \in U_2$ und $b = (b_1, \dots, b_n) \in U_2$, d.h.

$$\sum_{i=1}^n a_i = 0 = \sum_{i=1}^n b_i \quad (\star)$$

\implies für $a + b = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n (a + b)_i = \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \stackrel{(\star)}{=} 0 + 0 = 0 \implies a + b \in U_2$$

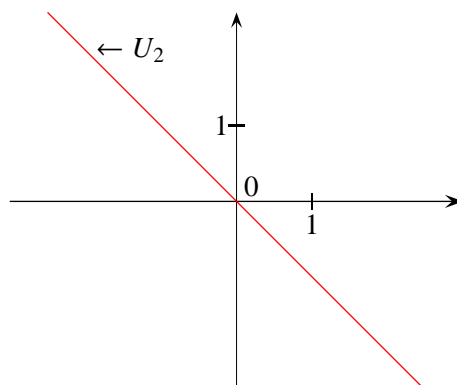
Ad (iii): Sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in U_2$, d.h. $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ und $\lambda \in \mathbb{R} \implies$

für $\lambda a = \lambda(a_1, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ gilt:

$$\sum_{i=1}^n (\lambda a)_i = \sum_{i=1}^n \lambda a_i \stackrel{\text{Distr.}}{=} \lambda \cdot \sum_{i=1}^n a_i = \lambda \cdot 0 = 0 \implies \lambda a \in U_2.$$

Skizze für $n = 2$:

$$x = (x_1, x_2) \in U_2 \iff x_1 + x_2 = 0 \iff x_2 = -x_1$$



(c) $U_3 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$:

Ad (i): Aus der Bedingung (i) für Unterräume folgt:

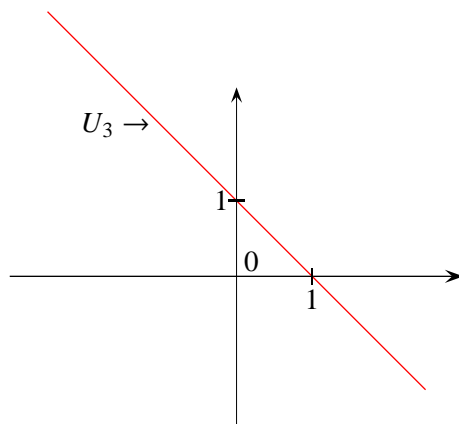
$U \neq \emptyset \implies \exists u \in U \xrightarrow[\text{(iii)}]{\text{Beding.}} 0 = 0 \cdot u \in U$, d.h. jeder Untervektorraum enthält den Nullvektor.

Für die Teilmenge U_3 gilt aber: $0 \notin U_3$, da ja $1 \neq \sum_{i=1}^n 0$.

Also ist U_3 kein Untervektorraum.

Skizze für $n = 2$:

$$x = (x_1, x_2) \in U_3 \iff x_1 + x_2 = 1 \iff x_2 = 1 - x_1$$



(d) $U_4 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}\}$:

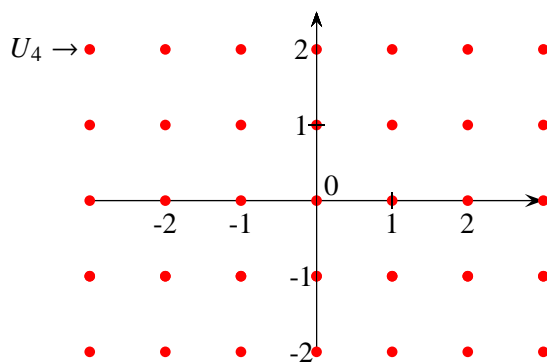
Ad (iii): Wegen $1 \in \mathbb{Z}$ gilt $a = (1, \dots, 1) \in U_4 \implies U_4 \neq \emptyset$;

aber wenn U_4 Untervektorraum wäre, so mit $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ und (iii) : $\frac{1}{2} \cdot (1, \dots, 1) = (\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}) \in$

$U_4 \xrightarrow[U_4]{\text{Def. von}} \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, und das ist ein Widerspruch.

Also ist U_4 kein Untervektorraum von \mathbb{R}^n .

Skizze für $n = 2$:



Zu Aufgabe 35:

Es sind in (a), (b), (c) die jeweiligen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit hin zu untersuchen.

Dabei heißen in einem Vektorraum V über einem Körper K je n Vektoren $a_1, a_2, \dots, a_n \in V$ linear unabhängig, wenn für Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ die Vektorgleichung

$$\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \dots + \lambda_n \cdot a_n = 0$$

genau eine Lösung, nämlich $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, besitzt.

Im folgenden wollen wir benutzen (für die Aufgabe durfte das ohne Beweis verwendet werden):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sei } R = \begin{pmatrix} r_1 & & & \\ 0 & r_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & r_n \end{pmatrix} \text{ obere Dreiecksmatrix; dann gilt:} \\ R \text{ invertierbar} \iff 1 \leq i \leq n : r_i \neq 0 \end{array} \right\} \quad (*)$$

Beweis:

„ \implies “: Induktion nach n :

Induktionsanfang $n = 1$: $R = (r_1) \in K^{1 \times 1}$ invertierbar \implies es gibt $S = (s_1) \in K^{1 \times 1}$ mit $E_1 = (1) = R \cdot S = (r_1 s_1) \implies r_1 s_1 = 1 \implies r_1 \neq 0$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$:

Induktionsvoraussetzung: Es sei die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ bewiesen, d.h. jede invertierbare obere Dreiecksmatrix in $K^{n \times n}$ hat keine Null in der Hauptdiagonalen.

Induktionsbeweis:

$$\text{Sei } R = \begin{pmatrix} r_1 & & & \\ 0 & r_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 0 & r_{n+1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} R_n & * \\ \hline 0 & r_{n+1} \end{array} \right) \text{ invertierbar mit der Blockmatrix } R_n = \begin{pmatrix} r_1 & * \\ 0 & \ddots & * \\ & 0 & r_n \end{pmatrix},$$

$R_n \in K^{n \times n}$ obere Dreiecksmatrix. Dann gibt es $R^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} S & V \\ \hline W & Z \end{array} \right) \in K^{(n+1) \times (n+1)}$ mit Blockmatrizen in geeignetem Format, so daß

$$E_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} R_n & * \\ \hline 0 & r_{n+1} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} S & V \\ \hline W & Z \end{array} \right) \stackrel{\text{Blockmatrix-}}{=} \text{produkt} \left(\begin{array}{c|c} R_n S + * \cdot W & R_n V + * \cdot Z \\ \hline 0 \cdot S + r_{n+1} \cdot W & 0 \cdot V + r_{n+1} \cdot Z \end{array} \right) \implies$$

$$(\clubsuit) \quad \begin{cases} (I) & R_n S + * \cdot W = E_n \\ (II) & R_n V + * \cdot Z = 0 \\ (III) & r_{n+1} W = 0 \\ (IV) & r_{n+1} Z = E_1 = 1 \end{cases}$$

Wir folgern aus (\clubsuit) :

$$(IV) \implies r_{n+1} \neq 0 \xrightarrow[(III)]{\text{In}} W = 0 \xrightarrow[(I)]{\text{In}} R_n S = E_n \xrightarrow[\text{Def.}]{\text{Invertierbar}} R_n \text{ invertierbar} \xrightarrow[\text{voraus.}]{\text{Ind.}} \forall 1 \leq i \leq n : r_i \neq 0$$

(die Hauptdiagonalelemente von R_n) und $r_{n+1} \neq 0$ q.e.d.

„ \Leftarrow “:

Wieder mit Induktion nach n :

Induktionsanfang $n = 1$: $R = (r_1)$ mit $r_1 \neq 0 \implies$ mit $S = \left(\frac{1}{r_1}\right)$ gilt: $R \cdot S = \left(r_1 \cdot \frac{1}{r_1}\right) = (1)$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für $n \in \mathbb{N}$: Jedes $R_n \in K^{n \times n}$, das obere Dreiecksmatrix ist mit keiner Null in der Hauptdiagonalen, ist invertierbar.

Induktionsbeweis:

$$\text{Sei } R_{n+1} = \left(\begin{array}{cccc|c} r_1 & & & & \\ 0 & r_2 & & * & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & r_n \\ \hline & & & & 0 & r_{n+1} \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{c|c} R_n & * \\ \hline 0 & r_{n+1} \end{array} \right) \in K^{(n+1) \times (n+1)}, \text{ alle } r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1} \neq 0.$$

Insbesondere ist dann $R_n \in K^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, die keine Null in der Hauptdiagonalen enthält; also ist R_n nach Induktionsvoraussetzung invertierbar mit Inverser $S \in K^{n \times n}$.

Es soll gezeigt werden, daß R_{n+1} invertierbar ist, d.h. daß es eine Matrix $R_{n+1}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline W & Z \end{array} \right)$ gibt mit

$$R_{n+1} \cdot R_{n+1}^{-1} = E_{n+1} \iff E_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} R_n & * \\ \hline 0 & r_{n+1} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} U & V \\ \hline W & Z \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} R_n U + * \cdot W & R_n V + * \cdot Z \\ \hline 0 \cdot U + r_{n+1} W & 0 \cdot V + r_{n+1} Z \end{array} \right)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} (I) & R_n U + * \cdot W = E_n \\ (II) & R_n V + * \cdot Z = 0 \\ (III) & r_{n+1} W = 0 \\ (IV) & r_{n+1} Z = 1 \end{array} \right\} \implies$$

$$\xrightarrow[r_{n+1} \neq 0]{(IV)} Z = \frac{1}{r_{n+1}}$$

$$(III) \implies r_{n+1} W = 0 \xrightarrow[r_{n+1} \neq 0} W = 0$$

$$\xrightarrow[(I)]{\text{In}} E_n = R_n U + * \cdot W \underset{W=0}{=} R_n U \implies U = R_n^{-1} = S \text{ (siehe oben)}$$

$$\xrightarrow[(II)]{\text{In}} 0 = R_n V + * \cdot Z = R_n V + \frac{1}{r_{n+1}} \cdot * \implies R_n V = -\frac{1}{r_{n+1}} \cdot * \implies V = R_n^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{r_{n+1}} \cdot * \right) = -\frac{1}{r_{n+1}} S \cdot *$$

Wählt man also $R_{n+1}^{-1} := \left(\begin{array}{c|c} S & -\frac{1}{r_{n+1}} S \cdot * \\ \hline 0 & \frac{1}{r_{n+1}} \end{array} \right)$, so folgt sofort aus obigem Gleichungssystem, daß

$$R_{n+1} \cdot R_{n+1}^{-1} = E_{n+1} \quad \text{q.e.d.}$$

Ad (a):

$a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (1, 1, 1)$, $a_3 = (1, 0, 1)$ im Vektorraum \mathbb{R}^3 :

Zu zeigen ist: $\lambda_1 \cdot a_1 + \lambda_2 \cdot a_2 + \lambda_3 \cdot a_3 = 0 \stackrel{!}{\implies} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$).

Es gelte also für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$:

$$\lambda_1 \cdot (1, 2, 3) + \lambda_2 \cdot (1, 1, 1) + \lambda_3 \cdot (1, 0, 1) = 0$$

$$\iff (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{In Matrix-} \\ \iff \\ \text{schreibweise} \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:= A} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen ist, daß das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ genau eine Lösung, nämlich $x = 0$, besitzt: dann sind die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear unabhängig. In der Sprache der linearen Gleichungssysteme bedeutet das gemäß der Fredholmschen Alternative:

Genau dann gibt es die eindeutig bestimmte Lösung $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$, wenn A invertierbar ist.

Man kann das Problem also lösen, indem man A auf obere Dreiecksgestalt bringt und (\star) benutzt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}-2 \cdot \text{I}]{\text{III}-3 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-2 \cdot \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Damit ist A durch elementare Zeilentransformationen in obere Dreiecksform übergeführt, und die obere Dreiecksmatrix hat keine Null in der Hauptdiagonalen, weshalb (\star) die Invertierbarkeit von A liefert. Also sind die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear unabhängig.

Ad (b):

$a_1 = (1, 2, 3)$, $a_2 = (-1, -6, -7)$, $a_3 = (1, 0, 1)$ im Vektorraum $\mathbb{R}^{1 \times 3}$:

Zu zeigen ist für $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot a_1 + \mu \cdot a_2 + \nu \cdot a_3 = 0 \stackrel{!}{\implies} \lambda = \mu = \nu = 0$.

Seien also $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ mit:

$$\lambda \cdot (1, 2, 3) + \mu \cdot (-1, -6, -7) + \nu \cdot (1, 0, 1) = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$$

$$\iff (\lambda - \mu + \nu, 2\lambda - 6\mu + \nu, 3\lambda - 7\mu + \nu) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{array}{c} \text{Komponenten-} \\ \iff \\ \text{vergleich} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lambda - \mu + \nu = 0 \\ 2\lambda - 6\mu + \nu = 0 \\ 3\lambda - 7\mu + \nu = 0 \end{array} \right\} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}}_{=: B} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (\star)$$

Wie in (a) ist für „linear unabhängig“ zu zeigen, daß das lineare Gleichungssystem (\star) genau die eine Lösung 0 hat. Wenn dies nicht der Fall ist, d.h. es auch Lösungen ungleich 0 gibt, sind die Vektoren a_1, a_2, a_3 linear abhängig. Wir transformieren die Matrix B wieder auf obere Dreiecksgestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -6 & 0 \\ 3 & -7 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}-2 \cdot \text{I}]{\text{III}-3 \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}-\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine obere Dreiecksmatrix mit einer Null in der Hauptdiagonalen, also ist das lineare Gleichungssystem $B \cdot x = 0$ nicht-trivial lösbar: es gibt Lösungen ungleich Null. Damit sind die Vektoren

a_1, a_2, a_3 linear abhängig.

Führt man die Transformation oben weiter, so kann man eine Lösung $x \neq 0$ bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{I - \frac{1}{4} \cdot II \\ -\frac{1}{4} \cdot II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{also ist } \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ eine Lösung:}$$

Setze (willkürlich) $\nu = 2$; dann liefert die 2.te Gleichung: $\mu + \frac{1}{2}\nu = 0 \implies \mu = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$;

aus der ersten Gleichung folgt: $\lambda + \frac{3}{2}\nu \implies \lambda = -\frac{3}{2} \cdot 2 = -3$;

damit:

$$-3 \cdot (1 \ 2 \ 3) - (-1 \ -6 \ -7) + 2 \cdot (1 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ 0) \quad \text{q.e.d.}$$

Ad (c):

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \text{ im Vektorraum } \mathbb{R}^{2 \times 2} :$$

$$\text{Wieder der Ansatz: } \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^4 \lambda_i \cdot a_i = 0 \stackrel{!}{\implies} \lambda_1 = \dots = \lambda_4 = 0$$

Also:

$$\begin{aligned} 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^4 \lambda_i \cdot a_i = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 + 2\lambda_3 & 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 & 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 6\lambda_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ergibt wieder vier Gleichungen für die vier Unbekannten λ_i ($1 \leq i \leq 4$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (I) \quad \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ (II) \quad 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 6\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ (III) \quad 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ (IV) \quad 4\lambda_1 + 4\lambda_2 + 5\lambda_3 + 6\lambda_4 = 0 \end{array} \right\} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{=: C} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Ganz wie in Teil (a) und (b) ist zu untersuchen, ob dieses Gleichungssystem nur die eindeutige Lösung 0 besitzt (dann sind die Vektoren linear unabhängig) oder aber Lösungen ungleich Null (dann sind sie linear abhängig). Wieder transformieren wir auf Dreiecksgestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{IV-2 \cdot II \\ III-3 \cdot I \\ II-2 \cdot II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{III-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV-III} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Also liefern die elementaren Zeilentransformationen eine obere Dreiecksmatrix ohne Nullen in der Hauptdiagonalen, d.h. mit (\star) ist das Gleichungssystem $Cx = 0$ nur durch $x = 0$ lösbar, also sind die Vektoren a_1, a_2, a_3, a_4 linear unabhängig in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Zu Aufgabe 36:

Seien V und W Vektorräume über einem Körper K , $f : V \rightarrow W$ linear und b_1, \dots, b_r eine Basis von V . Dann gilt:

$$f \text{ injektiv} \iff f(b_1), \dots, f(b_r) \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis:

„ \implies “ :

Zu zeigen: $\sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot f(b_i) = 0 \stackrel{!}{\implies} \text{alle } \lambda_i = 0 \quad (1 \leq i \leq r) \quad (\text{für } \lambda_i \in K).$

Seien also $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ mit $0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot f(b_i)$; dann folgt:

$$f(0) \stackrel{f \text{ linear}}{=} 0 = \sum_{i=1}^r \lambda_i \cdot f(b_i) \stackrel{f \text{ linear}}{=} f\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i b_i\right) \stackrel{f \text{ injektiv}}{\implies} \sum_{i=1}^r \lambda_i b_i = 0 \implies$$

$$\stackrel{\substack{b_1, \dots, b_r \\ \text{linear unabh.}}}{\implies} \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

Dabei gilt für jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$, daß $f(0) = 0$.

[denn: $f(0) = f(0 + 0) \stackrel{f \text{ linear}}{=} f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$ (da $(W, +)$ Gruppe).]

„ \impliedby “ :

Zu zeigen: $\forall x, y \in V : f(x) = f(y) \stackrel{!}{\implies} x = y.$

Sei also für $x, y \in V : f(x) = f(y) \implies 0 = f(x) - f(y) \stackrel{f \text{ linear}}{=} f(x - y)$; es reicht also zu zeigen:

$$f(z) = 0 = f(0) \quad \text{für ein } z \in V \implies z = 0$$

da dann aus $f(x - y) = 0$ folgt, daß $x - y = 0 \implies x = y$.

Sei also $z \in V$ mit $f(z) = 0$; weil b_1, \dots, b_r eine Basis von V ist, insbesondere also Erzeugendensystem von V , gibt es Koeffizienten $\mu_1, \dots, \mu_r \in K$, so daß $z = \sum_{i=1}^r \mu_i b_i \implies$

$$0 = f(z) = f\left(\sum_{i=1}^r \mu_i b_i\right) \stackrel{f \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^r \mu_i \cdot f(b_i) \quad (\star)$$

Weil aber nach Voraussetzung $f(b_1), \dots, f(b_r)$ linear unabhängig sind, folgt aus (\star) , daß

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0 \implies z = \sum_{i=1}^r 0 \cdot b_i = 0 \quad \text{q.e.d.}$$