

Lineare Algebra für Informatiker und Statistiker

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, $n = |G|$, $a \in G$ und $m := \min\{k \in \mathbb{N} : a^k = e\}$.
Zeigen Sie:

- (a) $a^i = a^j \Leftrightarrow m|(i - j) \quad (i, j \in \mathbb{Z})$
- (b) $\langle a \rangle = \{a^0, a^1, \dots, a^{m-1}\}$ und $|\langle a \rangle| = m$.
- (c) $m|n$.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

- (a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} \quad (a, c \in K, b, d \in K \setminus \{0\})$,
- (b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (a \in K, b, c, d \in K \setminus \{0\})$.

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Betrachten Sie \mathbb{R}^2 mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) && \text{(Addition)} \\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) && \text{(Multiplikation)}\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

- (a) $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right)$ ist das bzgl. der Multiplikation inverse Element zu (x, y) ,
sofern $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- (b) Für $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ gilt das Distributivgesetz:
$$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) = (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)$$

Aufgabe 20 (4 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Real- und Imaginärteil von

- (a) $\frac{1 - 2i}{2 + 3i}$ (b) $\frac{i}{\sqrt{2} + \frac{2}{1+i}}$ (c) $(2 - i)^5$ (d) $1 + i + i^2 + \dots + i^n \quad (n \in \mathbb{N})$

Abgabe einzeln oder zu zweit: Dienstag, 25.11.2008 bis 12⁰⁰ Uhr,
Übungskasten vor der Bibliothek im 1. Stock